

# Voyage d'une sonde de la Terre à Mars

## Partie I - Orbites d'une sonde

Une sonde spatiale, lancée dans le système solaire, moteurs éteints, suit une orbite képlérienne : une ellipse (voir document *De l'ellipse*) dont le Soleil est à l'un des foyers.

### I - Lois de Kepler ?

*Enoncer les lois de Kepler.*

- Les planètes décrivent autour du soleil des orbites elliptiques dont le soleil occupe un des foyers.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \theta}$$

- Une ligne joignant une planète au soleil balaye des aires égales en des temps égaux (loi des aires).

- La période de rotation d'une planète et le demi-grand axe de son orbite sont liés par la relation:

$$\frac{a^3}{P^2} = C^{te}$$

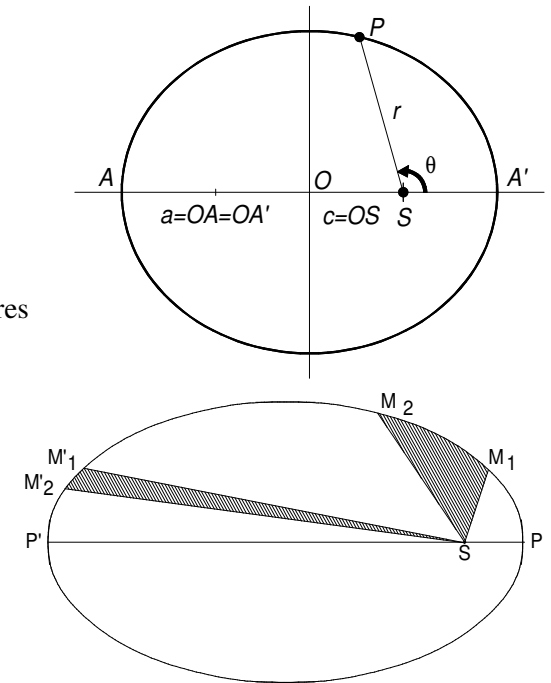
ou

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} \cdot (M_1 + M_2)$$

**Système solaire :**

Si  $P$  est exprimé en années sidérales et  $a$  en unités astronomiques (l'unité astronomique étant définie comme le demi-grand axe de l'orbite de la Terre)

$$\frac{a^3}{P^2} = 1$$



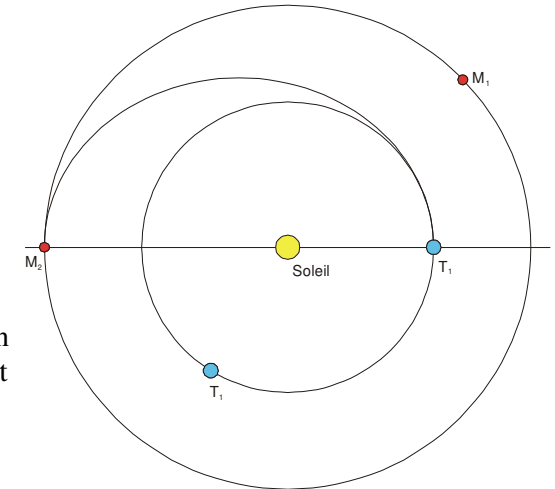
## II - Orbite de la Sonde

Pour éviter toute dépense superflue de carburant par des changements de trajectoire et de vitesse, au lancement on profitera de la vitesse de la Terre sur son orbite. La sonde sera lancée tangentiellement à l'orbite de la Terre.  
A l'arrivée l'orbite la plus économique sera celle qui sera juste tangente à l'orbite de la planète à atteindre.

### IIa - Schéma des orbites de la Terre, de Mars (ou d'une planète) et de la sonde ?

On simplifie en prenant des orbites circulaires pour les planètes.

Orbite keplerienne de la sonde : ellipse  
- tangente extérieurement au cercle orbite de la Terre  
- tangente intérieurement au cercle orbite de Mars  
Schéma des orbites de la Terre, de Mars et de la sonde.



Pour une planète inférieure, on intervertit le rôle de la Terre et de la planète.

### IIb - Caractéristiques de l'orbite de la sonde

Demi-grand axe sonde ?

Excentricité ?

Période sidérale sonde ?

Temps de parcours

Vitesse angulaire moyenne (par jour)

On distinguera quand c'est nécessaire les cas des planètes inférieures ou supérieures.

Demi-grand axe sonde

$$M_2 T_1 = 2 \cdot a_{sonde} = a_T + a_P$$

$$a_{sonde} = \frac{a_T + a_P}{2}$$

Excentricité  $e = \frac{a_P - a_T}{a_P + a_T}$  ou  $e = \frac{a_T - a_P}{a_P + a_T}$  (Planète inférieure)

Période sidérale sonde  $P_{sonde} = \sqrt{a_{sonde}^3}$

Temps de parcours  $T_{parcours} = \frac{P_{sonde}}{2}$

Vitesse angulaire moyenne  $V_{ang.moyenne} = \frac{360}{P_{jour}}$

## IIc - Position et période de la planète au lancement

Pour que Mars (ou la planète) soit au rendez-vous lorsque la sonde arrive, il faut qu'au lancement la Terre et Mars soit dans la bonne configuration angulaire.

Angle de rotation de la planète durant le parcours ?

Position de la planète au départ (angle  $T_1ST_p = \beta_0$ ) ?

Où est la planète à l'arrivée de la sonde ?

- départ en avance ?
- départ en retard ?

Rotation de la planète durant le trajet de la sonde

La position de la planète est telle que durant le trajet de la sonde, sa rotation l'amène à l'aphélie de la sonde (périhélie pour une planète inférieure)

$$\beta_{\text{Planète}} = T_{\text{Parcours}} \cdot V_{\text{ang.planète}}$$

Position de la planète

La sonde ayant fait la moitié de son orbite ( $180^\circ$ ), la position de la planète est :

$$\beta_0 = 180 - \beta_{\text{Planète}}$$

Départ	Planète externe	Planète interne
en avance	La planète est passée	La planète est en retard
en retard	La planète est en retard	La planète est passée

La période où la configuration Terre - planète est propice au lancement s'appelle une *fenêtre de tir*.

## IId - Calcul sur tableur : tableau des orbites des planètes, demi-grand axe, excentricité, période ?

Utiliser fichier Excel [**orbites\_sonde.xls**] / [**feuille Orbites**]

On trouvera dans le **tableau I** les **Caractéristiques des planètes**.

Où retrouver les valeurs actuelles adoptées par l'UAI (Union Astronomique Internationale) ?

A l'IMCCE :

<http://www.imcce.fr/page.php?nav=fr/ephemerides/astronomie/Promenade/debutweb.php>

Planète	<i>a</i> (u.a.)	<i>e</i>	<i>P</i> (jours)
Mercure	0.387	0.2060	87.969
Vénus	0.723	0.00677	224.701
Terre	1	0.01671	365.256
Mars	1.524	0.0934	686.980
Jupiter	5.203	0.0485	4332.589
Saturne	9.555	0.05551	10759.23
Uranus	19.218	0.04643	30688.48
Neptune	30.11	0.00899	60182.29

Calculer dans les colonnes E, F et G du [Tableau I]

- les périodes en années (col. E),
- les périodes obtenues par la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler (col. F)
- les vitesses angulaires moyennes (col. G) des planètes.

Formules de calcul ? Formules Tableur ?

La [cellule C3] contient la valeur de l'année sidérale en jours.

Période calculée :  $P_{cal.} = \sqrt{a^3}$

Formule de calcul :  $V_{Ang.moyenne} = \frac{360}{P_{Planète}} P$  en jours.

Planète	Période (années)	Période calculée	Vit. ang. (°/jour)
Form. Tab.	=D8/\$C\$3	=RACINE(B8^3)	=360/D8
Mercure	0.24084	0.24075	4.092
Vénus	0.61519	0.61476	1.602
Terre	1.00000	1.00000	0.986
Mars	1.88082	1.88138	0.5240
Jupiter	11.86179	11.86809	0.0831
Saturne	29.45668	29.53562	0.0335

## IId - Calcul sur tableur : tableau des orbites de la sonde, demi-grand axe, excentricité, période ? (suite)

Utiliser fichier Excel [**orbites\_sonde.xls**] / [**feuille Orbites**]

Calculer dans les colonnes I, à O du [Tableau II]

- le grand axe de la sonde (col. I),
- l'excentricité (col. J)
- la période de rotation par la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler (col. K)
- la période de rotation en jours (col. L)
- la durée du parcours (col.M)
- la vitesse angulaire moyenne (col. N)
- la position angulaire  $\beta_0$  de Mars au départ (col. O).

Formules de calcul ? Formules Tableur ?

Formules : voir partie II

<i>Planète</i>	<i>a sonde</i>	<i>exc.</i>	<i>P sonde (annnées)</i>	<i>P sonde (jours)</i>	<i>Durée parcours</i>	<i>Vit. ang. moyenne</i>	<i>b0 (°)</i>
	$=(\$B\$10+B8)/2$	$=(\$B\$10-B8)/(\$B\$10+B8)$	$=\text{RACINE}(18^{\wedge}3)$	$=K8*\$C\$3$	$=L8/2$	$=360/L8$	$=\text{MOD}(180-M8*G8;360)$
Mercure	0.6935	0.4415	0.57752	210.94	105.5	1.707	108.4
Vénus	0.8615	0.1608	0.79962	292.07	146.0	1.233	306.0
Mars	1.262	0.2076	1.41772	517.83	258.9	0.695	44.3
Jupiter	3.1015	0.6776	5.46208	1995.06	997.5	0.180	97.1
Saturne	5.2775	0.8105	12.1239	4428.32	2214.	0.081	105.9
Uranus	10.109	0.90108	32.1412	11739.77	5869.9	0.030	111.1
Neptune	15.555	0.9357	61.34865	22407.96	11203.9	0.016	113.0

## Ile - Périodicité des fenêtres de tir

La configuration où l'angle  $\beta_0$  vaut une valeur déterminée se reproduit périodiquement comme les conjonctions ou les oppositions de la planète avec le Soleil. C'est la *période synodique*.

Calcul de la période synodique ?

Soit  $S$  la période synodique,  $T$  la période de rotation de la Terre et  $P$  celle de la planète. Leurs vitesses angulaires de rotation sont  $\frac{360}{T}$  et  $\frac{360}{P}$

En une période synodique, les deux planètes auront tourné chacune d'un angle que l'on peut calculer :

Terre  $S \cdot \frac{360}{T}$  et la planète  $S \cdot \frac{360}{P}$

Le corps le plus près du Soleil tourne plus vite et sur une période synodique aura fait un tour de plus.

On pourra écrire

$$\text{planète intérieure} \quad S \cdot \frac{360}{P} = S \cdot \frac{360}{T} + 360$$

$$\text{planète extérieure} \quad S \cdot \frac{360}{T} = S \cdot \frac{360}{P} + 360$$

En simplifiant, la période synodique s'écrit :

$$\text{planète intérieure} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T}$$

$$\text{planète extérieure} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{P}$$

## Calcul des périodes synodiques

[Tableau III Feuille Orbites]

### Calculs tableur ?

A l'aide des formules donnant la période synodique en fonction des périodes sidérales de la Terre et la planète, calculer les périodes synodiques des planètes.

### Formules tableur :

- planètes inférieures :  $=1/(1/B20-1/SC\$3)$  pour Mercure
- planètes supérieures :  $=1/(1/SC\$3-1/B23)$  pour Mars

Planète	Période	Période synodique
Mercure	88.0	115.9
Vénus	224.7	583.9
Mars	687.0	779.9
Jupiter	4332.6	398.9
Saturne	10759.2	378.1
Uranus	30688.5	369.7
Neptune	60182.3	367.5

III - Tabulation et tracés des orbites de la Terre, de Mars et de la sonde

IIIa - Tabulation des orbites de la Terre, de Mars

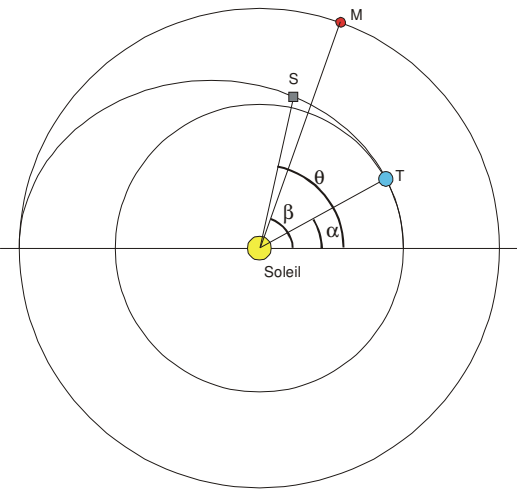
(Fichier *excel [orbites\_sondes.xls], [feuille tracés]*)

On va maintenant calculer les positions de la Terre et de Mars (en X et Y) pour des orbites circulaires, avec un pas temporel de 1 jour, sur des périodes nécessaires aux tracés des deux orbites des planètes.

Au jour 0, la Terre est à l'origine, et Mars fait un angle  $\beta_0$  (que l'on pourra faire varier) l'angle de rotation par rapport au point origine.

Organisation de la *[feuille Tracés]* des orbites. Pour la terre et Mars :

colonne A :	numérotation jour	cellule	nom	contenu
colonne B :	$\alpha$ , angle de la Terre	C10	(b0) :	$\beta_0$ angle origine de Mars
colonne C et D :	X, Y Terre	C7	(vat) :	vitesse angulaire de la Terre
colonne F et G :	X, Y Mars	D7	(vam) :	vitesse angulaire de Mars
colonne E :	$\beta$ angle de Mars	G2	(au) :	l'unité astronomique en km



Formules des colonnes ?

Angle de la Terre	$\alpha$
Abscisse de la Terre	X Terre
Ordonnée de la Terre	Y Terre
Angle de Mars	$\beta$
Abscisse de Mars	X Mars
Ordonnée de mars	Y Mars

Nombre de jours de tabulation  
pour la Terre ?  
Pour Mars ?

Formules des colonnes

col.	Variable	Formule	Formule tableur
B	a	$n \cdot V_{ang. Terre}$	=A16*vat
C	X Terre	$a_{Terre} \cdot \cos(a)$	=at*COS(RADIANS(B16))
D	Y Terre	$a_{Terre} \cdot \sin(a)$	=at*SIN(RADIANS(B16))
E	b	$n \cdot V_{ang. Mars}$	=A16*vam+b0
F	X Mars	$a_{Mars} \cdot \cos(b+b_0)$	=am*COS(RADIANS(E16))
G	Y Mars	$a_{Mars} \cdot \sin(b+b_0)$	=am*SIN(RADIANS(E16))

Nombre de jours de tabulation : une période sidérale de chaque planète :  
Terre 366 jours  
Mars 687 jours



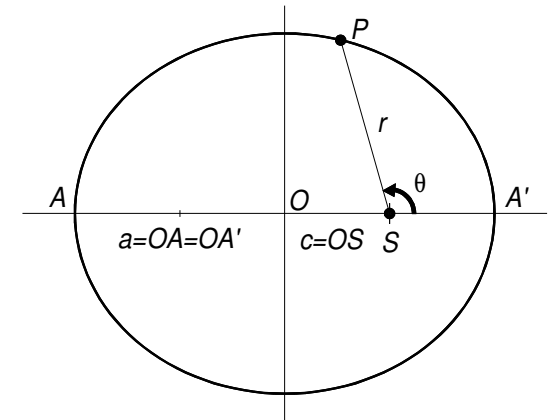
### IIIb - Tabulation et tracé de la sonde

(Fichier *excel [orbites\_sondes.xls], [feuille tracés] colonnes H à K*)

On va maintenant calculer les positions de la sonde (en X et Y) pour des angles  $\theta$  uniformément répartis de 0 à 360° à raison de un point par jour.

Pour chacun de ces angles en fonction des valeurs du demi rand axe et e l'excentricité, en se servant de la formule de l'ellipse, calculer et tabuler les positions de la sonde.

Rappel, équation de l'ellipse en coordonnées polaires :  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot \cos \theta}$



Valeurs des angles  $\theta$  (colonne H) ?

Pour chaque valeur de  $\theta$  tabuler :

- Rayon vecteur de la sonde (col. I) ?
- Les coordonnées X et Y de la sonde (formules des projections sur les deux axes du graphique) (col. J et K) ?

Formules des colonnes

col.	Variable	Formule	Formule tableur
H	$\theta$	$\theta_i = i \times V_{ang.moyenne} = \frac{360 \times i}{P_{jour}}$	=A16*\$E\$7
I	r sonde	$r_{sonde} = \frac{a_{sonde} \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \theta}$	=as*(1-\$E\$8*\$E\$8)/(1+\$E\$8*COS(RADIANS(H16)))
J	X sonde	$x_{sonde} = r_{sonde} \cdot \cos \theta$	=I16*COS(RADIANS(H16))
K	Y sonde	$y_{sonde} = r_{sonde} \cdot \sin \theta$	=I16*SIN(RADIANS(H16))

### IIIc - Graphique

Se servir des fonctionnalités Graphiques de Excel : Graphique/Nuage de points/Série

Dans un même graphique, tracer :

- |   |               |
|---|---------------|
| - l'orbite de la Terre (colonnes C et D)      | Série "Terre" |
| - l'orbite de Mars (colonnes F et G)          | Série "Mars"  |
| - la demi orbite de la sonde (colonne J et K) | Série "Sonde" |
| - marquer les points avec leur label          |               |
| Série "Sonde départ"                          |               |
| Série "Sonde arrivée"                         |               |
| Série "Mars départ"                           |               |
| Série "Terre arrivée"                         |               |

Pour les orbites, prendre les points les plus petits (taille 2).

Ajuster les dimensions du graphique de façon que les deux échelles X et Y soient les mêmes.

## IV - Vitesses de la sonde

Au départ et à l'arrivée, la sonde doit changer de vitesse

- au lancement, de la vitesse de la Terre à sa vitesse pour être au périhélie sur son orbite
- à l'arrivée, de sa vitesse à son aphélie à la vitesse de Mars

### IVa - Vitesses des planètes et de la sonde

On utilise la formule qui donne la vitesse sur une orbite elliptique en fonction du rayon vecteur :

$$V^2 = G(M_{\text{Soleil}} + M_{\text{Planète}}) \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$G$  constante de la gravitation,  $a$  demi-grand axe de l'orbite, Terre, planète ou sonde.

Où trouver les valeurs des constantes physiques et astronomiques ?

<http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/astronomie/Promenade/pages5/523.html>

On peut négliger la masse de la planète par rapport à celle du Soleil.

$$V^2 = GM_{\text{Soleil}} \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

On peut aussi utiliser le calcul direct des vitesses au périhélie et à l'aphélie et de la vitesse moyenne.

(voir *Astronomie Astrophysique* de M. Séguin et B. Villeneuve ERPI, collection du Renouveau pédagogique, 195, ISBN 2-7613-0929-4 pages 126-127)

Vitesse moyenne	$v_m = \frac{2\pi a}{T} (1 - e^2)^{-1/2}$
Vitesse au périhélie	$v_{\text{Périhélie}} = v_m \cdot (1 + e)$
Vitesse à l'aphélie	$v_{\text{Aphélie}} = v_m \cdot (1 - e)$

## IVb - Vitesses planètes - calculs tableur

Utiliser le [tableau IV]de la [Feuille Orbites]

A partir des caractéristiques des planètes du système solaire trouver

- leurs vitesses moyennes ?
- leurs vitesses au périhélie ?
- leurs vitesses à l'aphélie ?

Formules des vitesses, voir **partie IVa**

Formules tableur

col.	Argument	Formule tableur
E	Vitesse moyenne	=2*PI()*C35/(D35*24*3600)*(1-C8^2)^(-0.5)
F	Vitesse au périhélie	=E35*(1+C8)
G	Vitesse à l'aphélie	=E35*(1-C8)

Résultats

	demi grand axe (u.a.)	Période (jours)	Vitesse moyenne	Vitesse périhélie	Vitesse aphélie
Mercure	0.387	87.97	48.842	58.90	38.78
Vénus	0.723	224.70	34.958	35.19	34.72
Terre	1.000	365.26	29.748	30.25	29.25
Mars	1.524	686.98	24.207	26.47	21.95
Jupiter	5.203	4332.59	13.062	13.70	12.43
Saturne	9.555	10759.23	9.663	10.20	9.13
Uranus	19.218	30688.48	6.811	7.13	6.49
Neptune	30.110	60182.29	5.436	5.48	5.39

#### IVc - Vitesses sondes - calculs tableur

Utiliser le [tableau V] de la [Feuille Orbites]

Mêmes calculs pour les orbites des sondes par rapport aux planètes à atteindre.

- leurs vitesses moyennes ?
- leurs vitesses au périhélie ?
- leurs vitesses à l'aphélie ?

Formules des vitesses, voir **partie IVa**

Formules tableur

col.	Argument	Formule tableur
E	Vitesse moyenne	=2*PI()*J35/(L35*24*3600)*(1-K35^2)^(-0.5)
F	Vitesse au périhélie	=M35*(1+K35)
G	Vitesse à l'aphélie	=M35*(1-K35)

Résultats

Planète	a sonde (km)	excent.	Période	vitesse moyenne	périhélie	aphélie
Mercure	103604825	0.44196	210.9	39.82	57.41	22.22
Vénus	128703038	0.16076	292.1	32.47	37.69	27.25
Mars	188535384	0.20761	517.8	27.07	32.69	21.45
Jupiter	463345876	0.67758	1995.1	22.96	38.53	7.40
Saturne	788427489	0.81052	4428.3	22.11	40.02	4.19
Uranus	1510225200	0.90108	11739.8	21.57	41.01	2.13
Neptune	2323825599	0.93571	22408.0	21.38	41.38	1.37

Comparer les vitesses de départ et d'arrivée de la sonde aux vitesses de la Terre et de la planète à atteindre.