Astrogebra

L'orbite de Mars par Kepler

La construction de l'orbite à pas à pas

1 - Contexte historique.

Le Soleil, la Lune et les planètes ont, au cours de l'année, un mouvement apparent sur le fond du ciel où les constellations constituent des repères fixes.

Depuis la plus haute antiquité, ces astres errants ont attiré l'attention des hommes qui ont élaboré divers modèles pour interpréter leurs mouvements.

Dès le III^{ème} siècle avant notre ère, l'astronome grec Aristarque de Samos eut le premier l'idée que la Terre tournait sur son axe et autour du Soleil. Mais il fut accusé, pour cette opinion, de troubler le repos des dieux et c'est le système de Ptolémée (né en Egypte au II^{ème} siècle après J.-C.) consistant à placer la Terre au centre du monde et à en faire un corps fixe, qui fut reconnu officiellement jusqu'à l'époque de la Renaissance.

L'astronome polonais Nicolas Copernic (1473-1543) proposa à nouveau une représentation héliocentrique du système solaire montrant le double mouvement des planètes sur elles-mêmes et autour du Soleil, théorie qui fut condamnée par le Pape comme contraire aux Ecritures.

Un siècle plus tard, l'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) , convaincu que la distribution, la forme et les dimensions des orbites n'étaient pas dues au hasard mais régies par des lois, entreprit de les découvrir à partir des observations précises de Tycho Brahe dont il avait été le disciple. C'est ainsi qu'il établit une très belle théorie concernant l'orbite de Mars et qu'il énonça les trois lois dites lois de Kepler.

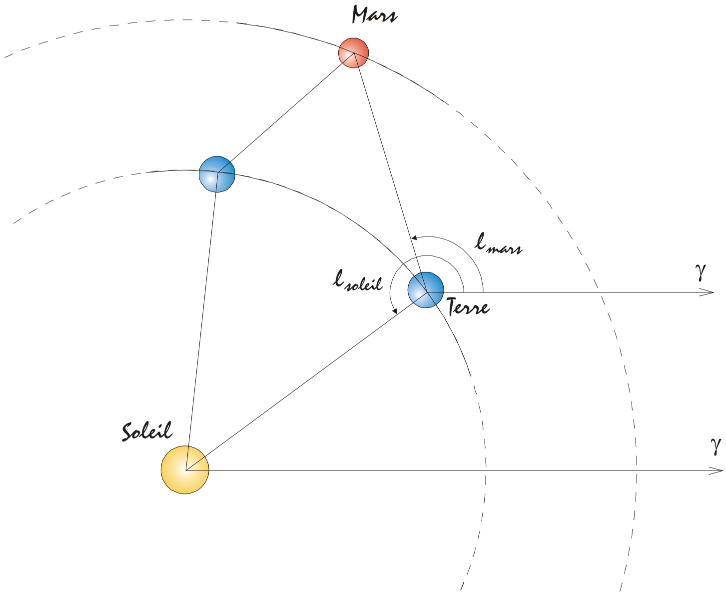
2 - Principe de la méthode utilisée par Kepler.

Pour un objet inaccessible, la méthode des parallaxes, qui consiste à viser cet objet à partir de deux sites différents, permet de déterminer la distance qui le sépare de l'observateur.

Kepler a utilisé cette méthode pour situer Mars par rapport à la Terre, la planète étant beaucoup plus près de nous que le fond du ciel avec les étoiles constituant le décor.

Cependant la distance de Mars à la Terre est telle que, même en se plaçant en deux points diamétralement opposés de la Terre, on ne pourrait voir Mars sous deux angles sensiblement différents. Il a alors imaginé de viser Mars à la même position de son orbite depuis deux positions différentes de la Terre sur la sienne, ce qui permet d'avoir des lieux d'observation assez éloignés.

Pour faire ces mesures, il faut que Mars soit dans les deux cas à la même place dans le repère héliocentrique de Copernic. Or Mars comme la Terre se déplace constamment ; il faut donc que les deux mesures soient faites à un intervalle de temps égal à la durée que met Mars pour faire un tour complet et que l'on appelle "révolution sidérale de Mars".



Entre les deux positions de la Terre, il s'est écoulé un période sidérale de Mars qui a fait juste un tour pour revenir à la même positions sur son orbite.

Période synodique

La méthode de Kepler demande la connaissance de la *période sidérale* de Mars.

Celle-ci ne peut pas être déterminée directement, mais peut être calculée à partir de la *période synodique* observable depuis la Terre.

Pour approfondir cette notion voir l'annexe en fin de TD ou voir les pages spécialisées dans le diaporama *keplomars.ppt*.

Les données de Kepler

Dans son étude, Kepler choisit 10 observations parmi celles de Tycho Brahé, choisies judicieusement pour appliquer sa méthode.

Mesures utilisées par Kepler

l_{Soleil} et l_{Mars} longitudes géocentriques écliptiques du Soleil et de Mars

Année	Mois	Jour	Jour Julien	l_{Soleil}	l_{Mars}
1585	Févr.	17	2300016	339 23'	135 12'
1585	Mars	10	2300037	359 41'	131 48'
1587	Janv.	5	2300703	295 21'	182 08'
1587	Janv.	26	2300724	316 06'	184 42'
1587	Mars	28	2300785	16 50'	168 12'
1589	Févr.	12	2301472	333 42'	218 48'
1591	Sept.	19	2302421	185 47'	284 18'
1593	Août	6	2303108	143 26'	346 56'
1593	Déc.	7	2303231	265 53'	3 04'
1595	Oct.	25	2303918	221 42'	49 42'

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Data							
2								
3	Date			Jour Julien	long. Soleil	long. Mars		
4	1585	2	17	2300016	339°23'	135°12'	339.38	135.2
5	1585	3	10	2300037	359°41'	131°48'	359.68	131.8
6	1587	1	5	2300703	295°21'	182°08'	295.35	182.13
7	1587	1	26	2300724	316°06'	184°42'	316.1	184.7
8	1587	3	28	2300785	16°50'	168°12'	16.83	168.2
9	1589	2	12	2301472	333°42'	218°48'	333.7	218.8
10	1591	9	19	2302421	185°47'	284°18'	185.78	284.3
11	1593	8	6	2303108	143°26'	346°56'	143.43	346.93
12	1593	12	7	2303231	265°53'	3°04'	265.88	3.07
13	1595	10	25	2303918	221°42'	49°42'	221.7	49.7

On peut retrouver ses données dans le fichier Données *data_kepler.xls*.

Pour le **Jour julien** voir à *http://www-obs.univ-lyon1.fr/labo/fc/cdroms/docu_gen.htm#divers* différents documents se rapportant à ce sujet.

Travail Geogebra

Ces données sont mises dans le fichier geogebra *keplomars_depart.ggb*

Ouvrir le fichier *keplomars_depart.ggb*, afficher la partie tableur.

Période synodique

Les données de Kepler permettent de trouver la période synodique de Mars.

1 - Repérer les configurations Terre Soleil Mars semblables. Comment ? Dans la colonne I calculer les *élongations* (différences de longitudes Mars-Soleil) pour chaque date.

2 - Recherche des couples de même élongation au Soleil et noter les espaces de temps les séparant

- 17 février 1585 et 28 mars 1787 — 769 jours
- 5 janvier 1587 et 12 février 1789 — 769 jours
- 19 septembre 1591 et 7 décembre 1793 — 810 jours

3 - Moyenne : 782.7 jour

4 - Calculer la période sidérale de Mars par la formule classique

$$\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{S}$$

P = 684,6 jours, littérature : 686.98 jours

Recherche des couples d'observation séparés par une période sidérale

Les dates doivent différer d'environ une période sidérale de Mars.

Se servir du tableur pour trouver les couples :

dans les colonnes J, K et L faire les différences des dates jours juliens entre les observations de deux en deux (col. J), de trois en trois (col. K) et de quatre en quatre (col. K)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Data											
2												
3	Date			Jour Jul...	long. Soleil	long. Mars	l Sol	l mars	diff. long.			
4	1585	2	17	2300016	339°23'	135°12'	339.38	135.2	204.18	21	687	708
5	1585	3	10	2300037	359°41'	131°48'	359.68	131.8	227.88	666	687	748
6	1587	1	5	2300703	295°21'	182°08'	295.35	182.13	113.22	21	82	769
7	1587	1	26	2300724	316°06'	184°42'	316.1	184.7	131.4	61	748	1697
8	1588	3	28	2300785	16°50'	168°12'	16.83	168.2	208.63	687	1636	2323
9	1589	2	12	2301472	333°42'	218°48'	333.7	218.8	114.9	949	1636	1759
10	1591	9	19	2302421	185°47'	284°18'	185.78	284.3	261.48	687	810	1497
11	1593	8	6	2303108	143°26'	346°56'	143.43	346.93	156.5	123	810	
12	1593	12	7	2303231	265°53'	3°04'	265.88	3.07	262.81	687		
13	1595	10	25	2303918	221°42'	49°42'	221.7	49.7	172			

Résultats :

	Couple de dates	Δ T	Cellules	Soleil		Mars	
				l_1	l_2	l_1	l_2
1	17/02/1585 et 05/01/1587	687 jours	(D6 - D4 : K4)	339.38	295.35	135.2	182.13
2	10/03/1585 et 26/01/1587	687 jours	(D7 - D5 : K5)	359.68	316.10	131.80	184.7
3	28/03/1588 et 12/02/1589	687 jours	(D9 - D8 : J8)	16.83	333.7	168.2	218.8
4	19/09/1591 et 06/08/1593	687 jours	(D11 - D10 : J10)	185.78	143.43	284.3	346.93
5	07/12/1593 et 25/10/1595	687 jours	(D13 - D12 : J12)	265.88	221.7	3.07	49.7

Constructions

Orbite de la Terre

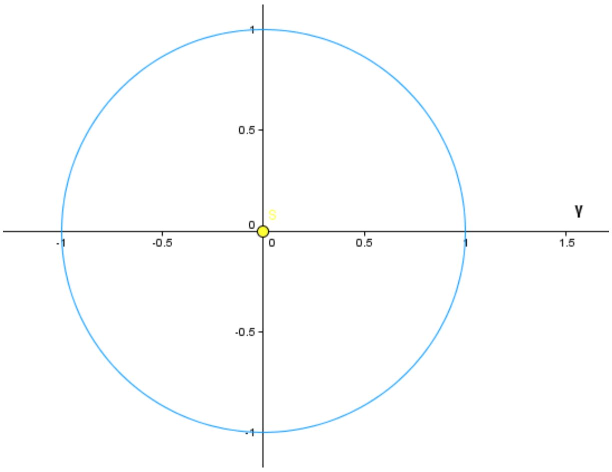
Placer le Soleil au centre : point S

S = (0,0)

Dessiner l'orbite de la Terre, l'unité de distance étant l'*unité astronomique*, la distance moyenne Terre Soleil.
On assimilera l'orbite de la Terre à une orbite circulaire.

C_T = Cercle[S,1]

Le cas d'une orbite légèrement elliptique sera abordée à la fin.
L'origine des longitudes héliocentriques est l'axe positif des x.



Données de construction des points

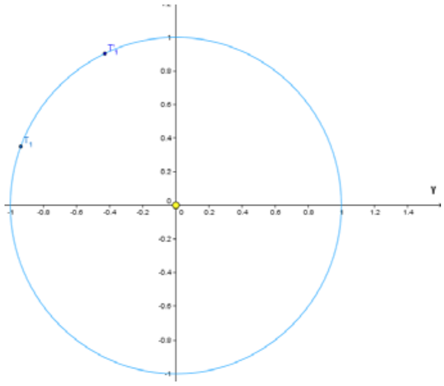
Pour chaque couple, on choisira :

- une couleur
- un bouton logique de visibilité (ou drapeau ou flag) des droites et intersections de la construction

Proposition de couleurs et de noms des boutons

Points	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Date 1	17/02/1585	10/03/1585	28/03/1588	19/09/1591	07/12/1593
Date 2	05/01/1587	26/01/1587	12/02/1589	06/08/1593	25/10/1595
Couleur	(0,102,204)	(102,204,0)	(255,102,102)	(153,153,0)	(255,204,0)
Flag	flg_1	flg_2	flg_3	flg_4	flg_5

Construction positions 1 de la Terre



Coul : (0,102,204) et drapeau d’affichage *flg_1*

La longitude du Soleil donne la position de celui-ci par rapport à la Terre. Pour placer la Terre par rapport au Soleil, il faut la longitude de la Terre par rapport au Soleil :

Longitude Terre/Soleil = long. Soleil/Terre+/-180°

Pour les deux dates 17/02/1585 et 05/01/1587 placer la Terre sur son orbite en créant les point T_1 et T'_1

Deux façons de placer ces points :

- sachant que la terre est sur un cercle de rayon 1, utiliser la forme polaire de Geogebra

T_1 = (1;159.38°) et *T'_1=(1;115.21°)* ou G4-180° et G6-180°

- trouver le point par l’intersection du cercle orbite et la demi-droite partant du Soleil dans la longitude de la Terre.

*T_1=Intersection[C_T,DemiDroite[S,Vecteur[S,(-cos(G4*pi/180),-sin(G4*pi/180))]]]*

et *T'_1=Intersection[C_T,DemiDroite[S,Vecteur[S,(-cos(G6*pi/180),-sin(G6*pi/180))]]]*

Construction premier point de Mars

Des points T_1 et T'_1, on trace les directions sous forme de demi-droites, longitudes géocentriques de Mars observé à ces dates. Leur intersection est la position commune de Mars lors des deux observations.

Longitudes géocentriques de Mars de T_1 : H4 (135.12°) et de T'_1 : H6 (182.08°)

Direction de Mars de T_1

*d1=DemiDroite[T_1,vecteur[S,cos(H4*pi/180),sin(H4*pi/180))]]*

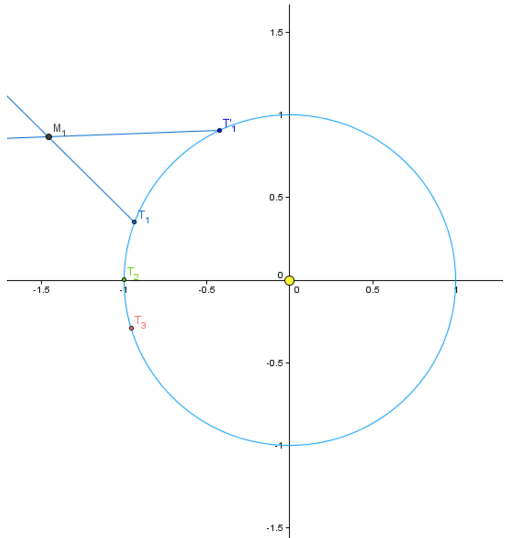
Direction de Mars de T'_1

*d’1=DemiDroite[T_1,vecteur[S,(cos(H6*pi/180),sin(H6*pi/180))]]*

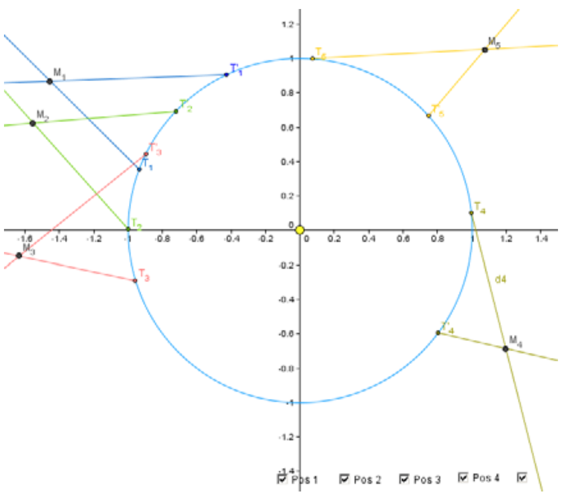
Mettre la condition de visibilité flg_1

Position de Mars :

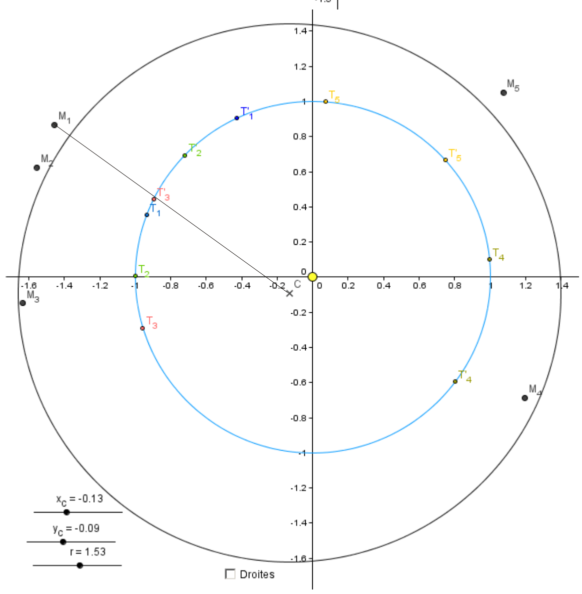
M_1=Intersection[d1,d'1]



Construire les quatre autres points.



Recherche de l’orbite



L’excentricité n’étant pas très élevée, on suppose que l’orbite elliptique est très proche d’un cercle.

On recherchera l’**ajustement du meilleur cercle qui passe au plus près des cinq points.**

Ce cercle est déterminé par :

- son centre C de coordonnées : x_C et y_C
- son rayon r

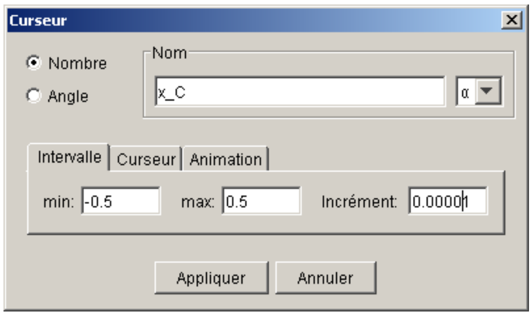
Méthode sous Geogebra

A partir d'un cercle donné, proche des points, on calcule :

- les distances des points au cercle
- la somme des carrés de ces distances appelée *excès* E.

Si le cercle passe par tous les points, E est nul.

La variation de la position du centre et/ou du rayon du cercle, fait varier cette quantité *excès* E. On recherchera le minimum de E.



Chaque paramètre du cercle est assujetti à un curseur.
Pour les variationsdes trois paramètres, on crée **trois curseurs** : x_C, y_C et r qui donneront le cercle

$$c_M = Cercle[(x_C,y_C),r]$$

On tracera le cercle et fera apparaître son centre C par un poiçnt en croix.

Calcul de l'excès

Points d'intersection cercle - segment CMi

I_1 est à l'intersection de la direction CM_1 et du cercle.

I_1=Intersection[DemiDroite[M_1,C],c_M]

Mesure de la longueur de M_1I_1

L_1=Longueur[Vecteur[I_1,M_1]]

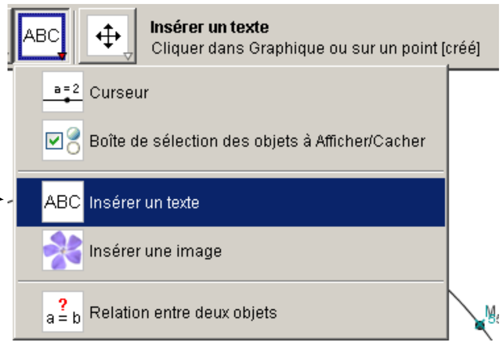
Idem pour M_2, M_3…

L'excès E vaudra :

$$E = (M_1I_1)^2 + (M_2I_2)^2 + (M_3I_3)^2 + (M_4I_4)^2 + (M_5I_5)^2$$

Et sous Geogebra :

E=L_1^2+L_2^2+L_3^2+L_4^2+L_5^2



Affichage de l'excès E dans texte : *"E=" + E*
Propriété texte : mettre 10 décimales, taille 14 et Gras

Ajustement du cercle

On agit en itérant sur les trois curseurs x_C, y_C, r successivement en les faisant varier, jusqu'à ce que E soit minimal.
Pour faire varier un curseur doucement il faut le sélectionner à la souris et agir sur les touches flèches ⬇⬆⬅➡ après avoir choisi un petit incrément dans les *Propriétés/curseur/Incrément* : petite valeur ou 0 (minimum).

Calcul des éléments de l'orbite

Une fois ce minimum atteint, tracer le grand axe de l'orbite de Mars

gaxe=Droite[C,S]

1 - Demi-grand axe *a* :

Créer les points d'intersection J_1 et J_2 du cercle c_M et de la droite *gaxe*

J=Intersection[gaxe,c_M]

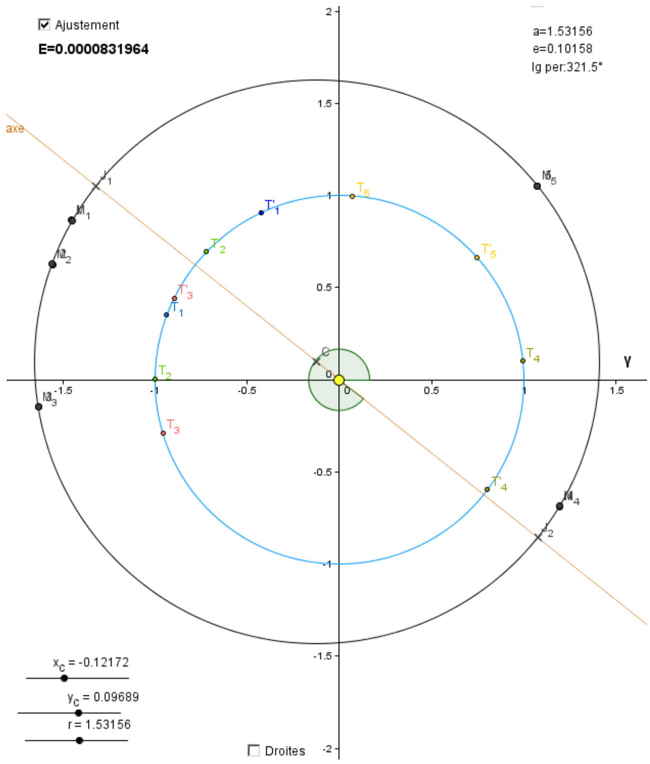
Le demi-grand est la longueur de CJ_1 ou la demi-longuer de J_1J_2

a=Longueur[Vecteur[C,J_1]]

2 - Excentricité :

On se sert de la formule de l'ellipse $e = c/a$ ou c est la distance centre du cercle - foyer (Soleil)

e_M=Longueur[Vecteur[C,S]]/a



3 - Longitude du périhélie :

C'est la direction du grand axe de C vers S.

Lper = Angle[Vecteur[(0, 0), (1, 0)], Vecteur[C, S]]

Afficher a, e et *Lper* accessoirement avec une case à cocher.

Résultats

Geogebra	Littérature
☑ Orbite a=1.53156 e=0.10158 lg per:321.5°	a = 1,524 e = 0,09340 lg per = 336,1°

Et si l'on tient d'une orbite elliptique de la Terre ?

Orbite elliptique de la Terre

L'orbite de la Terre sera toujours considérée comme un cercle. Mais elle ne sera plus centrée sur le Soleil. Pourquoi peut on le faire ?

Calcul du petit axe :

$$b = a\sqrt{1-e^2} = 0.99986$$

La différence entre *a* et *b* est bien plus petite que l'épaisseur du trait du graphique.

Calcul de la position du centre du cercle-ellipse à partir des caractéristiques de l'orbite de la Terre :

grand-axe : 1
excentricité $e_T = 0.01671$
longitude périhélie : l_T : 102,94°

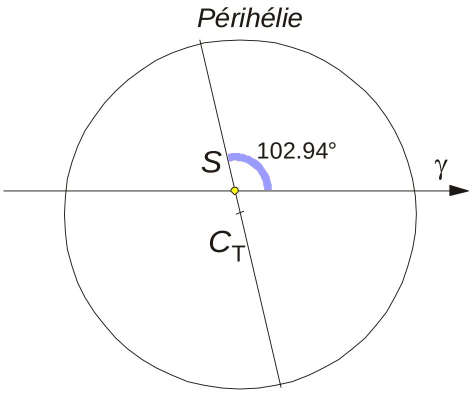
De $a = 1$ ⇨ $c = 0.01671$

Position de C_T :

$x_T = c\cos(l_T + 180°)$ *x_T=e*cos(l_T+180°)*
$y_T = c\sin(l_T + 180°)$ *y_T=e*sin(l_T+180°)*

Cercle orbite Terre :

c_T= Cercle[(x_T,y_T),1]



Positions des points T_1, T'_1, T_2, …

Si l'on a défini les points comme intersections du cercle orbite de la Terre et des directions Soleil-Terre, nous sommes revenus au cas précédent.

Si l'on a défini les points en coordonnées polaires sur le cercle de rayon unité, il faut changer la construction des points par les intersections des demis-droites *ST* et du nouveau cercle :

*T_1=Intersection[c_T,DemiDroite[S,vecteur[(0,0),(-cos(G4*pi/180),-sin(G4*pi/180))]]]*

La suite est inchangée.

Il faut alors refaire l'ajustement qui minimise l'excès *E*.

Nouveaux résultats

Version 1	Littérature	Version 2
☑ Orbite a=1.53156 e=0.10158 lg per:321.5°	a = 1,524 e = 0,09340 lg per = 336,1°	a=1.52238 e=0.09181 lg per:328.3°

La prise en compte de la véritable orbite de la terre donne de meilleurs résultats. On peu en conclure que les mesures de Tycho Brahé étaient de bonne qualité !

Ph Merlin, Cl. Piguet
février 2010

Annexe I

PÉRIODE SYNODIQUE -> PÉRIODE SIDÉRAL

Deux planètes tournant autour du Soleil se retrouvent périodiquement dans une configuration remarquable, opposition, conjonction...
En une période synodique les deux planètes ont tourné chacune d'un angle qui diffère de 360°, puisque une planète a fait un tour de plus ou de moins pour se retrouver dans la même configuration par rapport au Soleil.

Soit P la période sidérale de la planète et T celle de la Terre. Soit S la période synodique.

La vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil est $\frac{2\pi}{T}$

La vitesse angulaire de la planète autour du Soleil est $\frac{2\pi}{P}$

Au cours d'une période synodique la terre a parcourue $S\frac{2\pi}{T}$

et la planète $S\frac{2\pi}{P}$

Pour une planète extérieure, la Terre a fait au cours d'une période synodique un tour de plus que la planète (un tour de moins pour une planète intérieure).

$$S\frac{2\pi}{T} = S\frac{2\pi}{P} + 2\pi$$

ou

$$S\frac{360}{T} = S\frac{360}{P} + 360$$

en simplifiant par 2π ou 360 et en divisant par S

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T} - \frac{1}{S}$$

$$P = \frac{ST}{S - T}$$

et pour une planète intérieure

$$P = \frac{ST}{S + T}$$