«Ciel et Terre», Vol. 105, 5-9, 1989

Histoire de l'astronomie

La théorie des épicycles I : Des origines à Hipparque

M. GABRIEL
Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

Introduction

La théorie des sphères homocentriques, élaborée au temps de Platon et d'Aristote, fut la première théorie à avoir expliqué de façon qualitative le mouvement rétrograde des planètes (voir le numéro de mai-juin 1988, p. 87). Cependant, du fait même qu'elle posait en principe que les astres errants se déplacent sur des sphères centrées sur la Terre, elle ne pouvait expliquer les variations de diamètre apparent de la Lune et du Soleil, pas plus que celles de l'éclat des planètes. Elle ne pouvait, non plus, rendre compte de l'inégalité des saisons.

Les théories d'Héraclide du Pont et d'Aristarque de Samos qui lui succédèrent, rendaient compte de façon simple et élégante du mouvement rétrograde et des variations d'éclat des planètes (voir le numéro de juillet-août 1988, p. 107). Toutefois, l'hypothèse de mouvements circulaires uniformes laissait entiers les problèmes relatifs à la Lune et au Soleil.

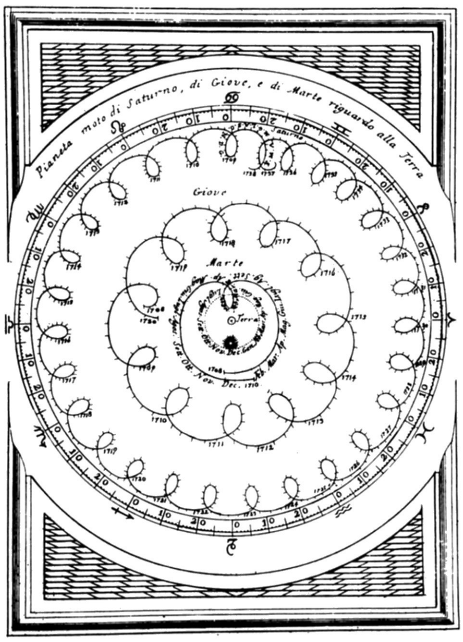
Ces théories n'eurent aucun succès et furent progressivement remplacées par la théorie des épicycles et des excentriques. Celle-ci se développa dès le 3e siècle avant J.C. mais ne trouva son expression finale que dans l'oeuvre de Ptolémée au 2e siècle de notre ère. Sous cette forme finale, elle sauva alors les apparences avec une précision dont les calculateurs et les observateurs se contenteront pendant des siècles.

Malgré cela, la théorie des sphères homocentriques gardera des partisans pendant 2000 ans parce qu'elle seule s'accorde parfaitement avec les principes de la physique d'Aristote et que certains préfèreront admettre ces principes plutôt que de croire le témoignage de l'observation.

Nous nous proposons de retracer le développement de la théorie des épicycles depuis ses origines jusqu'à son parachèvement par Ptolémée. Dans cette première partie, nous discuterons les origines de la théorie et la contribution d'Hipparque.

Abstract

We present the development of the theories of epicycles and eccentrics from the third century B.C. up to the work of Hipparchus. We show that the two theories are equivalent and we compare Hipparchus solution for the solar motion with the keplerian orbit.



En haut : Représentation ancienne de la théorie des épicycles selon Apollonius, avec les orbites de Mars, Jupiter et Saturne autour de la Terre (au centre). [Bibliothèque ORB.]
En bas : Portrait de Hipparque (2e siècle avant J.-C.). [Cabinet des Estampes, Bibliothèque Nationale, Paris.]

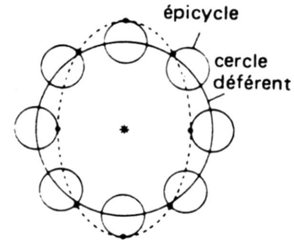
Les Origines

L'histoire des origines de la théorie est difficile à retracer car les textes de l'époque sont perdus et les premiers travaux ne sont connus que par les citations d'auteurs plus récents.

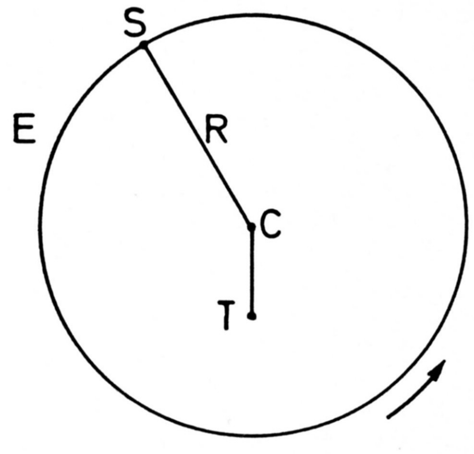
On admet généralement que l'origine de la théorie de l'excentrique se trouve dans la tentative d'expliquer l'inégalité des saisons et les variations du diamètre apparent du Soleil tout en conservant l'hypothèse du mouvement circulaire uniforme. Il suffit pour cela d'admettre que la Terre n'est pas située au centre de l'orbite solaire, mais qu'elle occupe une position excentrée.

Cette conclusion semble si naturelle qu'on peut se demander pourquoi les Grecs ne l'ont pas admise plus tôt. La répugnance vis-à-vis de cette idée résulte d'une part dans le fait que la physique d'Aristote demandait que la Terre immobile soit au centre des circulations et d'autre part les Grecs répugnaient à faire tourner les astres autour d'un point géométrique, c'est-à-dire autour de rien.

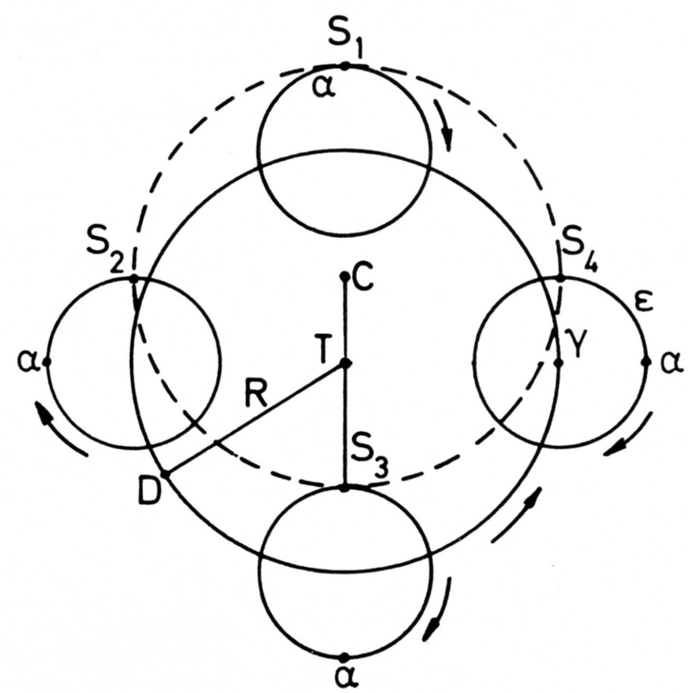
Si on en croit Simplicius, ce seraient les pythagoriciens qui les premiers auraient osé admettre l'idée de l'excentrique.



Selon Proclus, on retrouverait également les pythagoriciens à l'origine de l'hypothèse des épicycles. Celle-ci découle naturellement de la théorie d'Héraclide du Pont concernant le mouvement de Vénus et Mercure. On peut dire que, dans ce modèle, le Soleil parcourt le cercle déférent centré sur la Terre tandis que le cercle décrit par la planète autour du Soleil est l'épicycle. Pour généraliser la théorie, il suffit d'enlever le Soleil, de le remplacer par un point géométrique et d'appliquer ce schéma à une planète quelconque.



▲ **Figure 1.a: Mouvement du Soleil selon la théorie de l'excentrique fixe.**



▲ **Figure 1.b: Mouvement du Soleil selon la théorie de l'épicycle. On a porté 4 positions du Soleil S_1 à S_4. Cette construction montre que le cercle en traits discontinus de centre C et de rayon R correspond à la trajectoire du Soleil.**

Equivalence de l'hypothèse de l'excentrique et de celle de l'épicycle

A première vue, ces deux théories sont très différentes. Toutefois les géomètres démontrèrent très rapidement leur équivalence. Nous ignorons qui établit celle-ci le premier, mais Ptolémée en attribue le mérite au grand géomètre Appolonius de Perge (v 262 - v 180).

Cette équivalence est résumée par les deux théorèmes suivants:

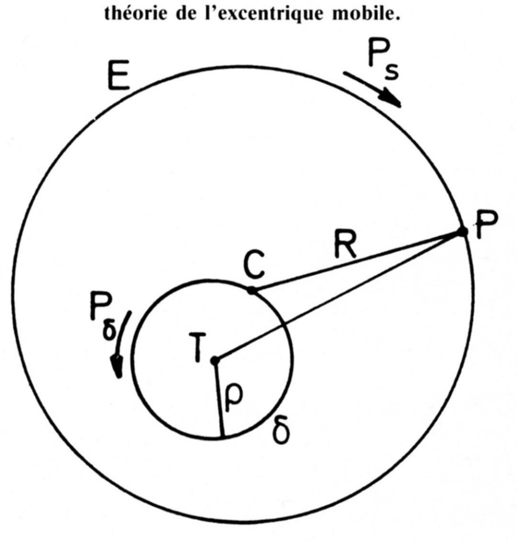
Théorème 1. Supposons que le Soleil décrive, d'occident en orient, en un an et à vitesse uniforme, un cercle E de rayon R et de centre C (fig. 1 a) différent du centre T de la Terre du Monde. Il revient au même de supposer que le Soleil est porté par un épicycle ϵ dont le rayon est égal à TC (fig. 1b), que le centre γ du cercle épicycle décrit uniformément, d'occident en orient, en un an, un cercle déférent D, de centre T et de rayon R; enfin que le Soleil parcourt uniformément, en un an, la circonférence de l'épicycle d'orient en occident.

Pour bien comprendre ce théorème, il convient de préciser le mouvement d'entraînement. Soit α un point fixe sur l'épicycle par rapport aux axes relatifs et situé initialement sur le rayon Tγ du déférent. Au cours du mouvement de l'épicycle sur le déférent, α reste constamment sur le rayon Tγ.

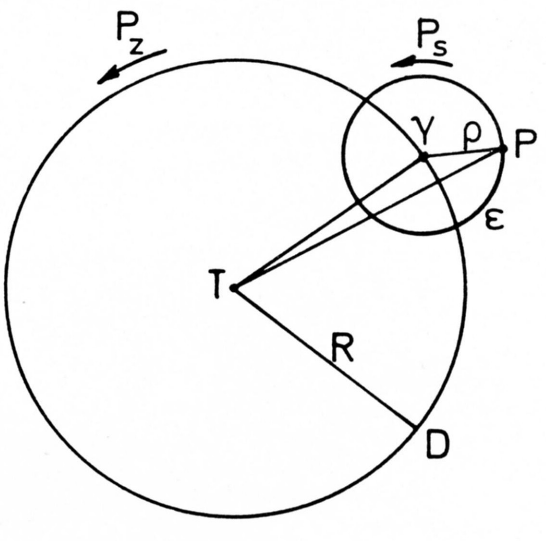
Dans la situation envisagée par le théorème 1, le centre C du cercle E est fixe, aussi dit-on que l'excentrique est fixe par opposition à l'excentrique mobile (fig. 2 a) envisagée au théorème 2. Dans ce cas, le centre du cercle excentrique décrit un cercle centré sur la Terre.

Théorème 2: Le centre γ de l'épicycle ϵ d'une planète décrit uniformémemt, d'occident en orient, un cercle déférent D, dont le centre T est le centre de la Terre et de rayon R (fig. 2 b), la période de cette rotation est égale à la période sidérale P_z de la planète; la planète décrit en même temps, d'un mouvement uniforme, l'épicycle ϵ, de rayon ϱ; cette seconde rotation qui se fait également d'occi-

▼ **Figure 2.a: Mouvement d'une planète selon la théorie de l'excentrique mobile.**



▼ **Figure 2.b: Mouvement d'une planète selon la théorie de l'épicycle.**



dent en orient, a une période égale à la période synodique P_s de la planète. Il revient au même de faire décrire uniformément à la planète un cercle épicycle E de rayon R et de centre C d'orient en occident avec la période P_s (fig. 2 a), tandis que le centre C décrit uniformément, d'occident en orient, un cercle déférent δ, de rayon ϱ ayant pour centre le centre de la Terre T. La période P_δ de ce mouvement est donnée par

$$1/P_\delta = 1/P_s + 1/P_z$$

Si on suppose que γ décrit le déférent D d'occident en orient et que la planète parcourt l'épicycle ϵ d'orient en occident, il revient au même de faire décrire par la planète l'épicycle E d'occident en orient tandis que son centre C parcourt le déférent δ d'orient en occident avec la période P_δ donnée par

$$1/P_\delta = 1/P_s - 1/P_z$$

si $P_z > P_s$. Si, par contre, $P_s > P_z$, P_δ est donné par

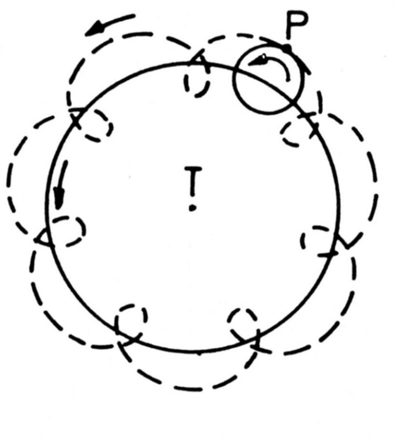
$$1/P_\delta = 1/P_z - 1/P_s$$

et C décrit le déférent δ d'occident en orient.

Si $P_z = P_s$ on voit que P_δ est infini et on retrouve donc le cas particulier de l'excentrique fixe.

Dans cette première version de la théorie, une planète parcourt l'épicycle avec une période égale à sa période synodique et le déférent avec pour période sa période sidérale. Les périodes de ces deux mouvements resteront les mêmes dans la théorie modifiée qu'établira Ptolémée.
La trajectoire d'une planète dans cette théorie, dite d'Apollonius de Perge, est illustrée par la figure 3.

Figure 3: Trajectoire d'une planète selon la théorie de l'épicycle d'Apollonius.



Relation entre la théorie d'Appolonius et celle d'Aristarque de Samos

La relation entre les théories d'Apollonius et d'Aristarque est illustrée par la figure 4. Les figures 4a et 4b montrent le passage du système héliocentrique au système géocentrique respectivement pour une planète intérieure et pour une extérieure. Elles se basent uniquement sur la relation

$$\vec{TP} = \vec{TS} + \vec{SP}$$

Les points T, S et P désignent respectivement la Terre, le Soleil et la planète considérée; a_o est l'unité astronomique et a le rayon de l'orbite de la planète (que nous assimilerons au demi-grand axe).

La figure 4 montre que le rayon de l'épicycle, mesuré en prenant le rayon du déférent comme unité, est donné par le rapport a/a_o pour les planètes intérieures et par a_o/a pour les planètes extérieures. Les valeurs du rayon de l'épicycle obtenues à partir des valeurs modernes de a sont comparées avec celles obtenues par Ptolémée au tableau 1. On peut voir que l'accord est très bon et que la plus grande erreur (3%) est relative à Mercure.

La figure 4 montre aussi que pour les planètes intérieures, le déférent est parcouru avec une période d'un an. Ptolémée adoptera cette valeur pour la période sidérale de Mercure et Vénus. Pour les planètes extérieures, le centre le l'épicycle parcourt le déférent avec pour période, la période sidérale de la planète.

Par rapport à des axes absolus, l'épicycle est parcouru avec une période d'un an pour les planètes extérieures. Pour les planètes intérieures, il est parcouru avec une période égale à la période sidérale de celles-ci. Par rapport à un système relatif dont un axe est lié à la direction Terre-Soleil (TS), la période de la planète sur l'épicycle est donc égale à la période synodique de celle-ci.

Si on exprime P_s et P_z en années, on a donc, pour les planètes extérieures, la relation bien connue:

$$1 = 1/P_s + 1/P_z$$

Figure 4: Passage du système héliocentrique au système géocentrique.

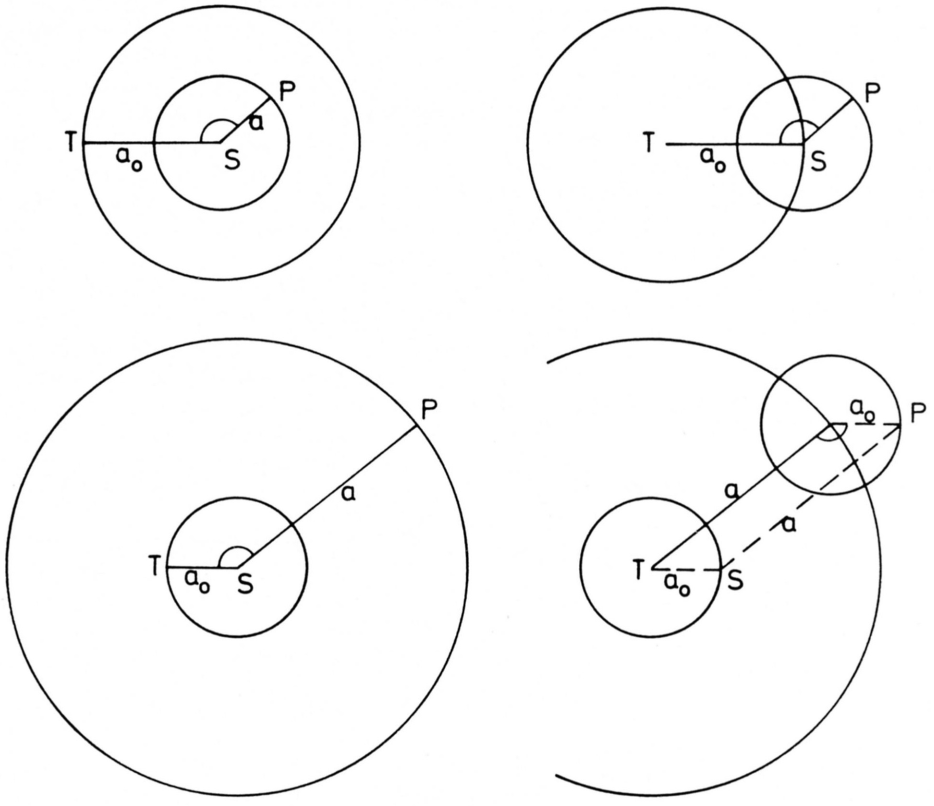


TABLEAU 1
Comparaison entre les valeurs modernes des rayons des épicycles et celles de Ptolémée

Planète	valeur moderne	valeur de Ptolémée	Différences en %
Mercure	0,387	0,375	3,1
Vénus	0,723	0,720	0,41
Mars	$(1{,}524)^{-1} = 0{,}656$	0,658	0,30
Jupiter	$(5{,}203)^{-1} = 0{,}192$	0,192	0,1
Saturne	$(9{,}539)^{-1} = 0{,}105$	0,108	2,8

Il est intéressant de noter que cette formule est admise par Ptolémée[1], sans démonstration, ni explication, comme une évidence alors que si elle est évidente dans un système héliocentrique, on voit mal comment elle a pu être déduite dans une théorie géocentrique. Ce fait est un des arguments en faveur de la conjecture, émise par P. Tannery[2] et G. Schiaparelli[3] selon laquelle la théorie des épicycles trouverait sa source dans le système d'Aristarque de Samos.

Notons aussi que la construction géométrique permettant de passer du système géocentrique d'Aristarque à la théorie des épicycles et qui est donnée à la figure 4, est d'une simplicité telle qu'il serait étonnant qu'elle ait échappé aux Grecs.

Hipparque

Nous ignorons pratiquement tout de la vie de celui qui fut l'un des plus grands astronomes de l'Antiquité. Nous savons seulement qu'il est né à Nicée en Bithynie et qu'il fit la plupart de ses observations astronomiques à Rhodes et à Alexandrie entre 161 et 127 av. J.C. Toutes ses oeuvres sont perdues, à l'exception d'un ouvrage d'importance secondaire: *«Commentaire aux phénomènes d'Aratus»*. Nous ne connaissons ses apports qu'à travers les témoignages de Théon de Smyrne, de Pline l'Ancien et de Ptolémée.

Ceux-ci nous permettent de retracer avec assez d'exactitude la grande découverte d'Hipparque: la précession des équinoxes. Remarquons que dans l'Antiquité on postulait la fixité de l'écliptique, la précession des équinoxes impliquait donc une rotation supplémentaire de la sphère des étoiles fixes. Celle-ci se faisait d'orient en occident autour de la normale à l'écliptique. Hipparque fixait sa vitesse à 36'' par an (valeur moderne 50,256'' par an).

Par contre, il est plus difficile de cerner exactement sa contribution au mouvement des astres errants. Il est toutefois clair qu'il a résolu le problème du mouvement du Soleil qui est le plus simple. Il l'a fait à la fois par la méthode de l'excentrique fixe et par celle de l'épicycle. Il a déterminé la valeur de l'excentricité (c'est-à-dire du rapport CT/R de la figure 1) qu'il trouve égale à 1/24^{e} ainsi que le lieu de l'apogée (direction de TC) auquel il fixait une longitude écliptique de 65,5°.

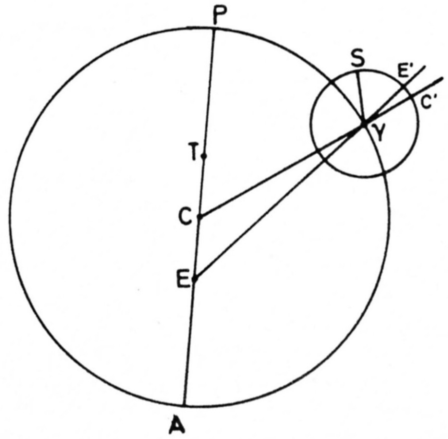
En appendice, nous avons reproduit la théorie d'Hipparque et nous la comparons à la théorie keplérienne. Soit a_o le demi-grand axe de l'ellipse parcourue par la Terre et $\bar{e}$ son excentricité. Supposons que le Soleil S parcoure un cercle excentrique dont le centre C (voir figure A3) est situé à une distance $\bar{e}\, a_o$ de la Terre T et que la position du Soleil sur ce cercle soit obtenue en faisant tourner la droite ES à vitesse constante. Le point E est situé à une distance $2\,\bar{e}\, a_o$ de la Terre et le cercle de centre E et de rayon a_o est appelé l'*équant*. Nous montrons que cette représentation du mouvement du Soleil est équivalente *au premier ordre en l'excentricité*, au mouvement keplérien à la fois pour la position du Soleil et pour sa distance à la Terre. Comme dans l'Antiquité, on ne disposait pas d'observation précise de variation du diamètre apparent du Soleil, Hipparque faisait circuler le Soleil sur l'équant (il plaçait donc le Soleil en S_1 et non en S ce qui n'entraîne pas d'erreur sur la position angulaire du Soleil à la précision à laquelle nous travaillons) et l'excentricité qu'il mesurait aurait donc dû être exactement le double de celle de l'ellipse de l'orbite terrestre. La principale erreur dans sa théorie résulte du fait qu'il a adopté une valeur de l'excentricité $e = 1/24 = 0.0417$ qui diffère de $2\,\bar{e} = 0.034$ de 18,4%.

Ptolémée reprendra ces résultats sans modification et sans s'apercevoir que, dans l'intervalle, la longitude de l'apogée avait augmenté de près de 5° du fait de la précession des équinoxes (elle était alors de 70° 24').

En ce qui concerne les planètes, il semble bien, d'après les textes de Ptolémée, qu'au temps d'Hipparque, on avait compris que la théorie des épicycles d'Apollonius est incapable de rendre compte des observations. Elle prédisait, notamment, que l'arc de rétrogradation des planètes a toujours la même grandeur (cf. fig. 3), quelle que soit sa position dans le zodiaque, ce qui est démenti par l'observation.

Il semble aussi qu'à l'époque d'Hipparque, on tentait de résoudre cette difficulté en décalant le centre du déférent par rapport à la Terre (fig. 5). Le mouvement des planètes était de ce fait affecté de deux anomalies; *l'anomalie zodiacale* qui résulte de la modification indiquée ci-dessus et *l'anomalie solaire* engendrée par le circulation de la planète sur l'épicycle.

Figure 5: La théorie de l'épicycle telle qu'elle était envisagée au temps d'Hipparque.



Hipparque ne disposait pas de suffisamment de bonnes observations pour pouvoir résoudre le problème. Aussi se limita-t-il à fixer un programme à ses successeurs. Il a aussi réuni les observations de ses prédécesseurs et les siennes et il les a présentées de façon telle qu'il soit facile d'en tirer les lois observationelles des diverses anomalies.

Avec Hipparque on trouve pour la première fois exprimée clairement la nécessité de plier les combinaisons géométriques des mouvements aux contraintes observationnelles. ■

---

[1] ***Claude Ptolémée, Almageste vol. IX et III, pg 273, Britanica, Great Books, vol. 16.***

[2] ***Paul Tannery, Mémoire de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4e série, tome I, 1893.***

[3] ***G. Schiaparelli, Memorie del R. Instituto Lombardo di Scienze e Lettre; classe di Scienze matematiche e naturali; vol. XVIII (série III, vol. IX); 1898.***

APPENDICE: Mouvement du Soleil par la théorie de l'excentrique

Nous reproduirons la discussion d'Hipparque, non pas par les méthodes géométriques anciennes, mais en utilisant des outils mathématiques plus modernes. Il est toutefois utile en vue de comparer celle-ci avec la théorie keplérienne de rappeler au préalable quelques résultats du problème des 2 corps.

Soit une orbite keplérienne de demi-grand axe a et d'excentricité $\bar{e}$. La distance r séparant la planète du Soleil est donnée par

$$r = a(1-\bar{e}^2)/(1+\bar{e}\cos \upsilon) \qquad (1)$$

où υ est l'anomalie vraie. Sa valeur est obtenue en résolvant l'équation de Kepler

$$M = E - \bar{e}\sin E \qquad (2)$$

et en tenant compte de

$$\tan^2(\upsilon/2) = (1+\bar{e})/(1-\bar{e}) \times \tan^2(E/2) \qquad (3)$$

$$M = 2\pi/P \times (t-t_o) \qquad (4)$$

E et M sont respectivement les anomalies excentrique et moyenne. P est la période du mouvement et t_o le temps de passage au périhélie.

Si on résoud les équations (1) à (3), **au premier ordre en l'excentricité**, on obtient

$$\upsilon = E + \bar{e}\sin E$$

$$E = M + \bar{e}\sin M$$

$$\upsilon = M + 2\,\bar{e}\sin M \qquad (5)$$

$$r = a(1 - \bar{e}\cos M) \qquad (6)$$

On remarquera que l'anomalie zodiacale de la planète $(\upsilon - M)$ est proportionnelle à $2\bar{e}$ tandis que les variations de distance sont elles proportionnelles à $\bar{e}$

On retrouve les relations (5) et (6) si on suppose que la planète T (voir figure A1) parcourt un cercle de centre C et de rayon CT = a avec une période P. C est tel que CS/a = $\bar{e}$ (S donne la position du Soleil). La position de la planète sur son orbite est obtenue en animant la droite ET d'un mouvement de rotation uniforme. E est tel que EC = CS = $\bar{e}$a. Par analogie avec la terminologie de la théorie des épicycles, le cercle de centre C parcouru par la planète est appelé excentrique. Celui de centre E est l'équant. En tenant compte que $\bar{e} << 1$ et donc que l'angle $\widehat{CTS}$ est petit, on obtient en appliquant la relation des sinus au triangle CTS:

$$\widehat{TCS} = v - \bar{e} \sin v \qquad (7)$$

$$r = ST = a\,(1 - \bar{e} \cos v) \qquad (8)$$

En appliquant cette même relation au triangle ETC, on obtient

$$\widehat{ETC} = \bar{e} \sin M = \widehat{TCS} - M \qquad (9)$$

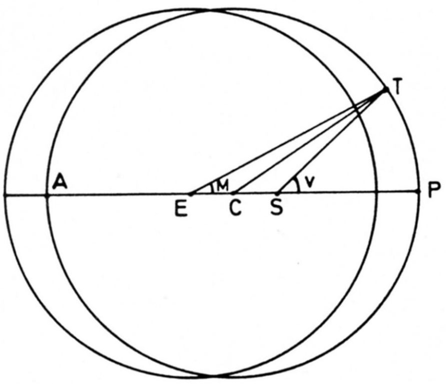


Figure A1: Mouvement keplérien au premier ordre en l'excentricité.

De (7) et (9) on tire

$$M + \bar{e} \sin M = v - \bar{e} \sin v$$

ou au premier ordre en $\bar{e}$

$$v = M + 2\,\bar{e} \sin M \qquad (10)$$

Les équations (8) et (10) sont bien identiques à (5) et (6) et le mouvement décrit ci-dessus est équivalent au mouvement keplérien *au premier ordre en l'excentricité.*

Considérons maintenant le problème discuté par Hipparque. Celui-ci obtient les caractéristiques de l'orbite solaire à partir de l'inégalité observée des saisons. Considérons que le Soleil parcourt, à vitesse constante, le cercle de centre E et de rayon a et que la Terre est située en T (fig.A.2). Posons TE = ae. Soient S_1 et S_3 les positions occupées par le Soleil aux équinoxes de printemps et d'automne respectivement. Il en résulte qu'aux solstices d'été et d'hiver, le Soleil est respectivement en S_2 et S_4. De plus S_2TS_4 est perpendiculaire à S_1TS_3. Nous adopterons,

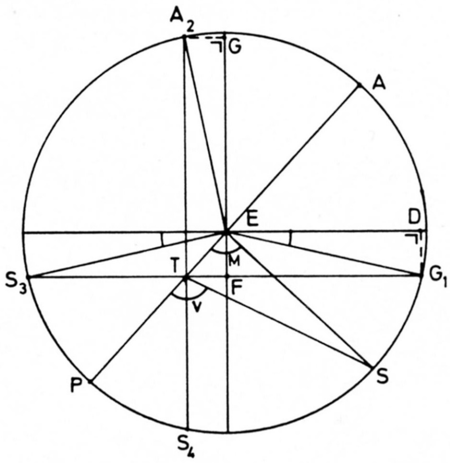


Figure A2: Orbite du Soleil selon Hipparque et positions du Soleil S_1 à S_4 au début des saisons.

avec Hipparque, une longueur du printemps et de l'été respectivement de 94,5 et 92,5 jours et une longueur de l'année de 365,25 jours. Les deux autres saisons ont dès lors une longueur totale de 178,25 jours.

Nous désirons, en premier lieu, déterminer l'excentricité e et la direction de l'apogée A du Soleil en calculant l'angle $\widehat{S_1TE}$. On a

$R = \widehat{S_1ES_3}/\widehat{S_3ES_1} = (180° + 2\,\widehat{S_1ED})\,/\,(180° - 2\,\widehat{S_1ED}) = (94{,}5 + 92{,}5)/178{,}12$

et donc R = 1.049088. On en tire $\widehat{S_1ED} = 90°\,(R-1)/(R+1) = 2{,}156°$.

On a aussi

$\widehat{S_1ES_2} = 90° + \widehat{S_1ED} + \widehat{GES_2} = 360° \times 94{,}5\,/\,365{,}25$

$\widehat{S_1ES_3} = 90° + \widehat{S_1ED} - \widehat{GES_2} = 360° \times 92{,}5\,/\,365{,}25$

Il en résulte que

$\widehat{GES_2}' = 360°/2 \times (94{,}5 - 92{,}5)\,/\,365{,}25 = 0{,}9856°$

On a aussi $TF = S_2G = a \sin\widehat{S_2EG}$
$CF = S_1A = a \sin\widehat{S_1ED}$

D'où il résulte que

$e = (\sin^2\widehat{S_2EG} + \sin^2\widehat{S_1ED})^{1/2} = 0{,}04137 = 1/24$

$\tan\widehat{S_1TC} = TF/TC = \sin\widehat{S_1CD}\,/\,\sin\widehat{S_2CE} = 2{,}18709$

et $\widehat{S_1TC} = 65{,}43°$

On obtient donc une excentricité de l'orbite solaire de 1/24 et une longitude de l'apogée solaire de 65,43°.

Calculons maintenant l'anomalie du Soleil $v = \widehat{PTS}$ en fonction de l'anomalie moyenne $M = \widehat{PES}$.

En appliquant la relation des sinus dans le triangle TES et en tenant compte que l'angle en S est petit, on obtient

$$v = M + e \sin M \qquad (11)$$

$$r = TS = a(1 - e \cos M) \qquad (12)$$

Si on compare (5) et (11), on voit que l'on doit établir la correspondance e = 2$\bar{e}$. En ce qui concerne les mesures angulaires de positions, la théorie d'Hipparque est donc équivalente à la théorie keplérienne du premier ordre en e. L'erreur dans la théorie d'Hipparque résulte donc, essentiellement, dans la valeur adoptée e. En effet on a obtenu e = 0,0417 et celle-ci diffère de 2$\bar{e}$ = 0,034 de 18,4%.

Si, par contre, on compare (6) et (12) on voit qu'en ce qui concerne les mesures de distances, il faut supposer e = $\bar{e}$! La difficulté n'a jamais été remarquée car les Grecs ne disposaient pas d'observations précises permettant de mesurer les variations de la distance Terre-Soleil. En fait, sans s'en rendre compte, Hipparque place le Soleil sur l'équant (au point S_1 de la fig. A3) et non sur le déférent en S.

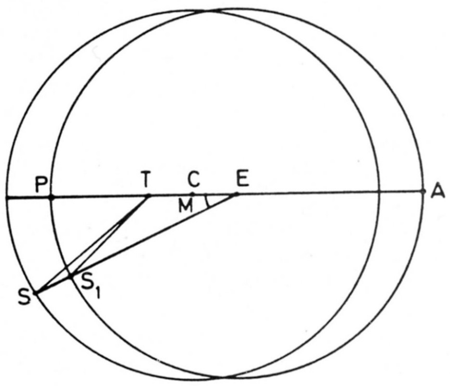


Figure A3: Relation entre l'orbite solaire au premier ordre et celle d'Hipparque.

On peut aisément montrer que cette « erreur » n'entraîne pas d'erreur au premier ordre sur la position angulaire c.à.d. que dans notre approximation:

$$\widehat{STP} = \widehat{S_1TP}$$

Posons $\widehat{PES} = M$, $\widehat{PTS} = v$ et $\widehat{PTS_1} = v_1$ et appliquons la relation des sinus dans le triangle TS_1E en tenant compte que l'angle en S_1 est petit.

On obtient $v_1 = M + e \sin M$

En comparant cette expression à (11) on voit qu'au premier ordre en e

$$v = v_1$$

Le déplacement du Soleil de S en S_1 n'entraîne donc pas d'erreur significative sur sa position angulaire. ■

La seconde partie de cet article sur la théorie des épicycles (L'œuvre de Ptolémée) paraîtra prochainement.

«Ciel et Terre», Vol. 105, 91-94, 1989

Histoire de l'astronomie

La théorie des épicycles II: L'œuvre de Ptolémée

par M. Gabriel

Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

Abstract. We present the contribution of Ptolemy to the theory of epicycles. Though his theory met the observations of planetary positions with enough accuracy it was unable to explain the brightness variations of Venus. Strangely, epicycles were not considered as real but just as mathematical artifacts allowing to explain the observations.

Introduction

Dans l'article précédent (voir numéro de janvier-février 1989, p. 5-9), nous avons retracé l'évolution de la théorie des épicycles depuis ses origines jusqu'à Hipparque. Nous présentons maintenant la contribution de Ptolémée et nous discutons son interprétation et sa précision.

La Théorie des Planètes après Hipparque et avant Ptolémée.

Nous avons vu, dans l'article précédent, qu'à l'époque d'Hipparque, on tentait de rendre compte du mouvement des planètes en décalant le centre du déférent par rapport à la Terre (fig. 1). Il est donc nécessaire de déterminer la direction de la droite *PTCA* appelée *ligne des absides du déférent*. Le point A est l'apogée du déférent ou l'*auge*, *P* est le périgée du déférent ou l'*opposé de l'auge*. Le rapport *CT/CA* est l'excentricité du déférent.

Au second livre de son Histoire Naturelle, Pline l'Ancien (23-79) expose les théories astronomiques de son temps. Malheureusement, son langage est particulièrement obscur et révèle l'incompétence de l'auteur en ce domaine. On peut toutefois en conclure que des astronomes inconnus avaient déjà déterminé la ligne des absides du déférent des planètes et que, dans certains cas, les résultats obtenus se rapprochaient fortement de ceux que Ptolémée obtiendra.

Le problème de l'ordre des planètes

Classer les planètes par distances croissantes par rapport à la Terre est le problème qui se pose dans un système géocentrique. Les caractéristiques des orbites planétaires sont telles que pour les planètes extérieures il est possible d'établir un tel classement sans ambiguité; l'ordre reste le même quelle que soit la position de celles-ci sur leur orbite. Par contre, pour les planètes intérieures, cet ordre varie en fonction du temps.

Les Grecs ont eu l'intuition que la distance Terre-planète devait augmenter avec la période sidérale. Aussi ont-ils constamment classé dans un ordre de distance croissante le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne. Par contre, les positions de Mercure et Vénus, auxquelles ils assignaient la même période sidérale qu'au Soleil, ont varié selon les écoles. La Lune a, bien sûr, toujours été considérée comme la plus proche de la Terre. Pythagore plaçait les astres errants dans l'ordre suivant: la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne. Par contre, selon Platon et Aristote, cet ordre devait être: la Lune, le Soleil, Vénus, Mercure, Mars, Jupiter et Saturne. Selon Pline l'Ancien, à l'époque d'Hipparque, on admettait généralement l'ordre de Pythagore. Dans le premier chapitre du livre IX de l'Almageste, Ptolémée cite les deux opinions. Il nous dit aussi que les tenants de l'ordre de Platon se basaient sur l'absence d'observation de transit. Ptolémée, quant à lui, se rallie à l'ordre de Pythagore pour une raison esthétique. Il estime que le Soleil est situé entre les planètes dont l'élongation est limitée et celles qui atteignent l'opposition.

Gravure ancienne représentant Ptolémée ceint d'une couronne royale (certains érudits croyaient en effet à tort qu'il faisait partie de la dynastie des Ptolémée qui régnèrent sur l'Egypte).
[Extrait de «Margarita Philosophica» de Gregorius Reisch, 1504 - Bibliothèque ORB]

Claude Ptolémée

Nous ignorons pratiquement tout de la vie de Ptolémée, sinon qu'il observa à Alexandrie de 127 à 141. Par contre, son oeuvre scientifique est bien connue car la plupart de ses travaux nous sont parvenus. Les principaux sont: *la Grande composition mathématique de l'astronomie*, plus connue sous le nom que nous a légué le Moyen-Age: l'*Almageste*, qui est une véritable somme de l'astronomie ancienne, *les Hypothèses de planètes* donne un exposé abrégé et corrigé de la théorie des planètes, les *Phases des étoiles fixes* (tables de levers et de couchers d'étoiles), la *Tetrabile* (exposé d'astrologie), le *Guide géographique* en huit volumes et deux traités d'*Optique* et d'*Acoustique*.

Dès les toutes premières pages de l'Almageste, Ptolémée énonce les principes physiques sur lesquels reposent ses théories astronomiques. Ceux-ci sont résumés en cette phrase: «*De façon générale, nous devons admettre que le ciel est sphérique et se déplace sphériquement et que la forme de la Terre est sensiblement sphérique lorsqu'on la considère dans son ensemble; qu'elle est située juste au milieu du ciel, tel un centre géométrique; qu'en grandeur et en distance, elle est dans le rapport d'un point par rapport à la sphère des étoiles fixes et qu'elle n'a aucun mouvement local*».

Il admet aussi comme principe que les mouvements des astres sont produits par la combinaison de mouvements circulaires uniformes. Nous avons déjà signalé que pour le Soleil, Ptolémée entérina la théorie d'Hipparque sans la moindre modification. Pour les planètes, il essaya tout d'abord de résoudre le problème selon la même ligne que ses prédécesseurs. Il s'aperçut cependant que celle-ci ne pouvait rendre compte des observations et il y apporta une modification originale. Au lieu de supposer que la droite $C\gamma$ de la figure 1 tourne à vitesse constante, il fut amené à admettre que la position du point γ est obtenue en faisant tourner la droite $E\gamma$ à vitesse constante. Le point E est tel que $TC = CE$. Il est appelé le centre de l'équant. L'*équant* ou *cercle égalisateur* est un cercle de centre E et de rayon égal à celui du déférent. C'est le rayon de ce cercle qui tourne à vitesse constante. Au cours du mouvement de la planète S sur l'épicycle, c'est

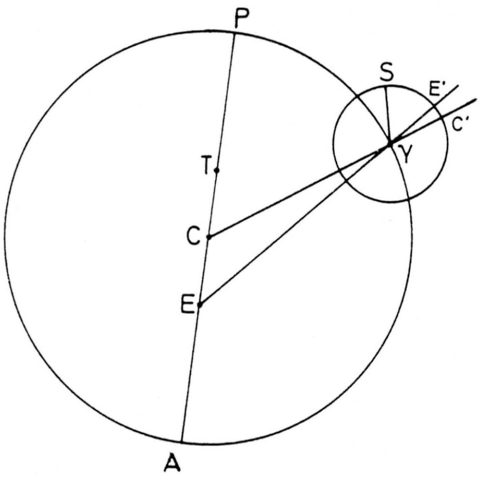


Figure 1: La théorie de l'épicycle telle qu'elle était envisagée au temps d'Hipparque.

maintenant l'angle $\widehat{E'\gamma S}$ (et non plus $\widehat{C'\gamma S}$) qui croît uniformément en fonction du temps.

En introduisant cette modification, Ptolémée réussissait à interpréter les observations mais il faisait aussi une entorse grave à la théorie du mouvement uniforme. Ce faisant, il a fait preuve d'une souplesse d'esprit suffisante pour adapter la théorie à l'exigence des observations. Il ne nous dit pas comment il a été amené à cette modification. Toutefois notre discussion du mouvement du Soleil de l'article précédent va nous permettre de comprendre quelles observations l'ont conduit à ce résultat. La figure 2 illustre le mouvement de la Terre T et d'une planète intérieure P autour du Soleil S selon la théorie du pre-

Représentation du système de Ptolémée montrant les sphères de cristal auxquelles étaient attachés les corps célestes qui tournaient tous autour de la Terre: la Lune, le Soleil, les planètes (jusqu'à Saturne) et les étoiles (symbolisées par le Zodiaque).
[Gravure extraite de «Harmonia Macrocosmica» de Cellarius, 1661, Bibliothèque ORB]

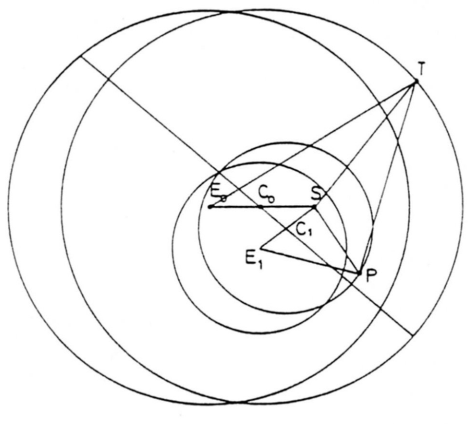


Figure 2: Théorie héliocentrique utilisant des mouvements circulaires uniformes et équivalente, au premier ordre en l'excentricité, à la théorie keplérienne.

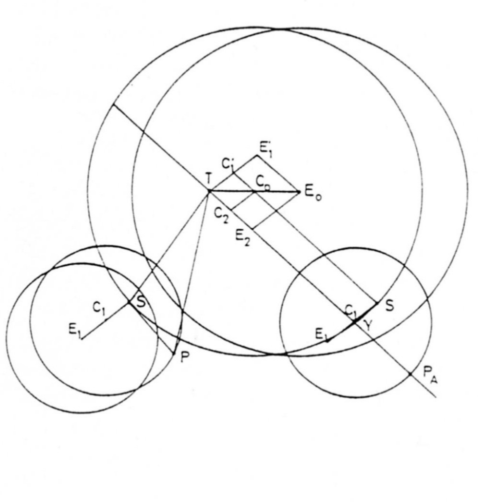
mier ordre. On peut dire que la Terre T (planète P) se déplace sur un cercle excentrique de centre C_0 (C_1) et que sa position est obtenue en animant la droite E_0T(E_1 P) d'une rotation uniforme. Si a_0 et a_1 sont respectivement les rayons des excentriques de la Terre et de la planète, on a $E_0C_0 = C_0S = e_0a_0$ et $E_1C_1 = C_1S = e_1a_1$ où e_0 et e_1 sont les excentricités des ellipses kepleriennes des deux astres. Il est aisé de vérifier que la distance entre les deux planètes sera maximale et minimale lorsqu'elles seront toutes deux situées sur la droite C_0C_1 dans l'ordre T, C_0, C_1, P pour le maximum et dans l'ordre C_0, C_1, P, T pour le minimum. La droite C_0C_1 donne donc la direction de la ligne des apsides du déférent.

Si on effectue la transposition du système héliocentrique vers un système géocentrique, la figure 2 donne la figure 3. Le Soleil se déplace sur un déférent de centre C_0 et E_0S tourne à vitesse constante. Par S, on mène une droite parallèle au grand axe de l'orbite de la planète et sur celle-ci on porte les points C_1 et E_1 respectivement centre du déférent et de l'équant.

Ce système est notablement plus complexe que celui de Ptolémée qui adopte le mouvement décrit plus haut dont les points C_2 et E_2 sont les centres respectivement du déférent et de l'équant. Le Soleil ne se déplace pas sur le déférent et le centre γ de l'épicycle correspond au «Soleil moyen». On a toujours $TC_2 = C_2E_2 = ea_0$ où e est l'excentricité qu'adoptera Ptolémée et $TC_2 = TC_0 - TC_1$. La figure 3 montre également la configuration lorsque la planète est à l'apogée en P_A. Par construction, $TC'_1E'_1$ est parallèle à SC_1E_1 et C_0C_2 (E_0E_2) est parallèle à $TC'_1(TE'_1)$. On a donc $C_2\gamma = C_0S = a_0$. Les rayons que Ptolémée adoptera pour le déférent et l'épicycle sont donc respectivement a_0 et a_1.

Si on observe, au voisinage de l'auge ou de son opposé, le mouvement du point γ, on trouvera que l'anomalie zodiacale de la pla-

Figure 3: Passage du système héliocenrique de la fig. 2 à un système géocentrique.



nète est proportionnelle à $2e$. Par contre, si on mesure la longueur de l'arc de rétrogradation au voisinage de ces deux mêmes points, sa longueur étant fonction de la distance séparant les deux astres, on constatera que la différence est proportionnelle à e.

La figure 4 illustre la même transposition que la figure 3 mais cette fois pour une planète extérieure. Par T, on mène la parallèle à SE_1 et $TC_1 = C_1E_1 = e_1a_1$. Par C_1, on trace

TABLEAU 2: Paramètres des orbites kepleriennes pour l'année 100 après J.C., $\bar{e}$ est l'excentrique et l_A est la longitude de l'auge

Planète	e	a	l_P	$\bar{e}$	l_A	erreur maximum
Vénus	0,008	0,723	104°49'	0,0127	55,43°	6'
Mars	0,091	1,524	301°8'	0,0984	116,1°	30'
Jupiter	0,045	5,203	344°6'	0,0449	159,94°	6'
Saturne	0,062	9,539	55°5'	0,0603	234,64°	4'
Terre	0,017	1	70°24'3			0,5'

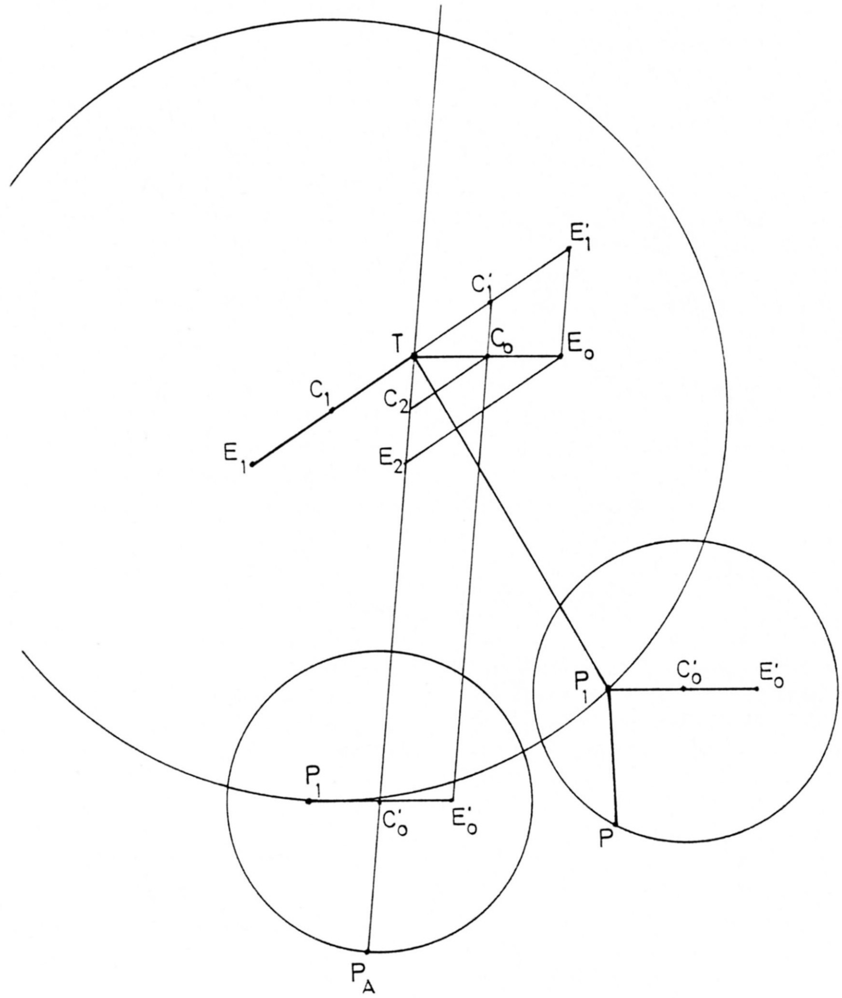


Figure 4: Même figure que la fig. 3 mais pour une planète extérieure.

un cercle de rayon a_1. On obtient le point P_1 en traçant par T la parallèle à SP. La trajectoire de P_1, par rapport à la Terre, est donc identique à celle de la planète par rapport au Soleil. Par P_1 on trace la parallèle à TE_0 et $P_0C'_0 = C'_0E'_0 = TC_0 = a_0e_0$. Par C'_0, on trace un cercle de rayon a_0 et on obtient P en traçant par P_1 la parallèle à TS. La trajectoire de P par rapport à P_1 est donc identique à celle du Soleil par rapport à la Terre. En examinant la configuration à l'apogée, on constate que cette fois les rayons du déférent et de l'épicycle seront respectivement a_1 et a_0.

Si nous comparons notre système géocentrique, correct au premier ordre, avec celui de Ptolémée, nous constatons que ce dernier prédit correctement la position de la planète lorsque celle-ci est située sur la ligne des apsides. Par contre, aux autres temps, cette position est affectée d'une erreur qui est fonction des excentricités, des demi-grands axes et de l'angle entre ceux-ci. Derek J. de S. Price[1] a calculé l'écart maximum entre les positions prédites par les théories de Ptolémée et de Kepler en supposant que, dans les deux cas, les éléments orbitaux exacts sont utilisés. Ces erreurs sont données dans la dernière colonne du tableau 2. Elles sont inférieures, sauf pour Mars, à la précision des observations qui, avant Tycho Brahé, restera supérieure à 10'. Pour Mercure, l'erreur est nettement plus grande; toutefois sa proximité du Soleil ne permet guère son observation qu'au voisinage des élongations maximales ce qui diminue fortement les contraintes observationnelles. Dans la pratique, des erreurs nettement supérieures aux valeurs reprises au tableau 2 ont été observées. Celles-ci sont dues à l'inexactitude des éléments orbitaux adoptés. L'erreur la plus fréquemment commise consiste à oublier que ces éléments orbitaux varient lentement au cours du temps et à reprendre des valeurs déterminées plusieurs siècles plus tôt. Ainsi, pour Mars, on a relevé des erreurs atteignant 2,5°.

Pour déterminer les caractéristiques de l'orbite d'une planète, il faut, en premier lieu, obtenir la direction de la ligne des apsides du déférent et son excentricité. Pour ce faire, il suffit d'observer la planète lors de trois oppositions ayant lieu dans des signes du zodiaque différents. La figure 5 illustre le problème pour Mars. Les points A, B et C correspondent à trois oppositions. L'observation de la position de la planète par rapport aux étoiles fournit la longitude ecliptique des trois points. Elle était de 81°, 148°30' et 242°34' respectivement. Le temps séparant les trois observations fournit les angles $\widehat{AEB} = 81°44'$ et $\widehat{BEC} = 95°28'$. Sachant que $CE = CT$ ces données permettent le calcul des deux paramètres recherchés. Cependant, le problème n'a pas de solution directe et il doit être résolu par itérations.

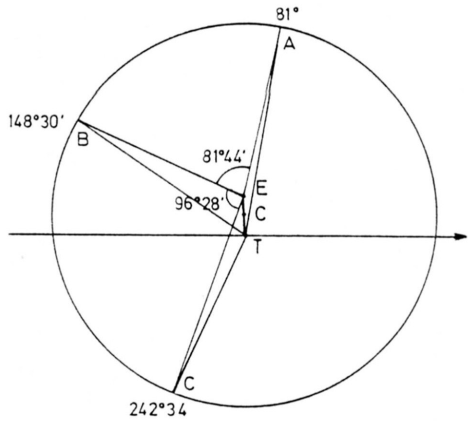


Figure 5: Données permettant de déterminer le lieu de la ligne des apsides et l'excentricité de Mars.

Finalement, pour obtenir le rayon de l'épicycle, il faut observer la planète en dehors de l'opposition, de préférence lorsqu'elle s'en écarte le plus.

La théorie exposée ci-dessus est valable pour Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. La déter-

[1] Derek J. de S. Price: Critical problems in the history of Sciences 1969, ed. Marshall Glagett, The University of Wisconsin Press.

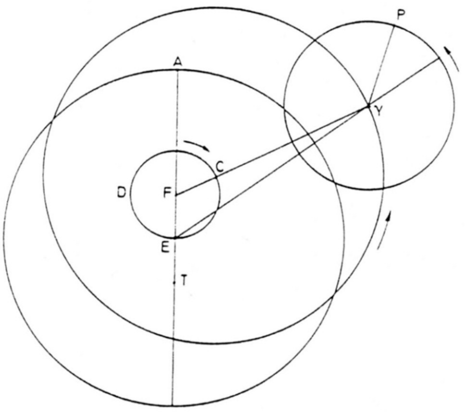
TABLEAU 1: Principaux paramètres des orbites planétaires obtenus par Ptolémée

Planète	Longitude de de l'auge	Excentricité	Période synodique en jours	Période sidérale en années
Mercure	181°17'	0,174	115,9	1
Vénus	55°	0,0208	583,9	1
Mars	115,5°	0,1	780	1,88
Jupiter	161°	0,046	399	11,86
Saturne	233°	0,057	378,1	29,43

mination de l'orbite de Mercure présente plus de difficultés car l'excentricité de son orbite keplérienne, égale à 0,206, est nettement plus grande que pour les autres planètes. Il faut aussi ajouter qu'étant plus proche du Soleil, elle est plus difficilement observable.

Pour rendre compte des observations, Ptolémée a dû adopter une théorie plus complexe qui est illustrée à la figure 6. Considérons la droite AT où T est la Terre et A l'auge. Sur cette droite, portons les points E et F tels que $ET = EF$. E est le centre de l'équant dont le rayon est égal à EA. ET/EA est l'excentricité. Par F, traçons une circonférence de rayon FE. Soit C un point sur celle-ci qui se déplace, d'est en ouest, à vitesse constante et avec une période d'un an. Avec C comme centre, traçons une circonférence de rayon égal à EA. Celle-ci est le déférent sur lequel se déplace, d'ouest en est et avec une période d'un an, le centre γ de l'épicycle. La position de γ est obtenue en faisant tourner la droite $E\gamma$ à vitesse constante. L'épicycle est parcouru par la planète d'ouest en est, à vitesse constante et avec une période égale à la période synodique de Mercure.

Figure 6: Combinaisons de mouvements circulaires représentant l'orbite de Mercure.



Ce modèle rend compte des caractéristiques principales du mouvement de Mercure mais de façon nettement moins précise que pour les autres planètes.

Le Tableau 1 reprend les principaux paramètres des orbites planétaires qu'avait obtenus Ptolémée. Il est intéressant de comparer ces valeurs avec celles obtenues en résolvant le triangle SC_0C_1 de la figure 2. Les paramètres des orbites planétaires, calculés pour l'année 100 après J.C. et données par Neugebauer[2], nécessaires au calcul ainsi que les résultats sont repris au Tableau 2. L'excentricité, le demi-grand axe et la longitude du périhélie des planètes y sont notés respectivement e, a et l_p. On constate que les longitudes de l'auge sont obtenues avec une précision supérieure au pour cent tandis que l'erreur sur les excentricités est en général de quelques pour cent mais que pour Vénus, elle atteint 40%. Finalement, Ptolémée entreprit également d'interpréter les variations de latitude écliptique des planètes. Dans ce but, il inclina légèrement le déférent et l'épicycle par rapport au plan de l'ecliptique. Il dut aussi introduire divers mouvements dans le but de faire varier ses inclinaisons. Aussi, le système permettant d'expliquer les variations de latitudes paraît assez complexe et artificiel. Toutefois, Ptolémée faisait remarquer que la simplicité des mouvements célestes ne peut être estimée par nos critères humains!

Conclusions

Nous avons vu que la théorie des épicycles s'est développée en adoptant au départ pour principes la position centrale de la Terre et la nécessité d'expliquer les mouvements planétaires par une combinaison de mouvements circulaires uniformes. Toutefois, le développement de l'astronomie observationnelle a permis l'accumulation d'observations précises permettant de tester les théories et a fait comprendre qu'il est nécessaire de plier les constructions théoriques aux contraintes observationnelles. Dès lors, il a été nécessaire d'abandonner plusieurs des principes de départ et de les remplacer par d'autres hypothèses aussi simples que possible. La Terre a ainsi cessé de coïncider avec le centre du déférent mais surtout, il a fallu abandonner l'hypothèse que celui-ci était parcouru à vitesse constante.

Le prix à payer pour «sauver les phénomènes» fut la transformation de l'astronomie en un exercice mathématique qui ne s'appuierait plus sur aucun principe physique comme c'était le cas au temps d'Aristote. Il faudra attendre Newton pour réconcilier l'astronomie et la physique. Ce divorce entre la physique péripatéticienne et la théorie planétaire se marque dans l'interprétation que Ptolémée lui-même ainsi que tous les commentateurs de l'antiquité ont donné de cette dernière. Pour tous les anciens, la théorie de Ptolémée est uniquement une méthode mathématique de calcul de la position des astres. Ils n'attribuent aucune réalité aux mouvements le long des déférents et épicycles, pour eux le mouvement réel des astres reste inconnu.

La théorie de Ptolémée rend compte avec une précision suffisante des observations de position faites avant Tycho Brahé. Les variations d'éclat de Vénus présentaient toutefois un problème. Cependant, il ne semble pas avoir été remarqué par les anciens (ce qui me paraît étonnant quand on sait que c'est principalement la variation d'éclat des planètes qui a conduit à l'abandon de la théorie des sphères homocentriques) mais il est mentionné par Copernic. Etant donné les valeurs adoptées pour le rayon des épicycles (voir tableau 1 de l'article précédent), la distance géocentrique de Vénus devait varier entre 0,28 et 1,72 tandis que celle de Mars était comprise entre 0,342 et 1,658. L'éclat de Vénus aurait donc dû varier un peu plus que celui de Mars. Or on sait que la magnitude de Vénus et Mars varie respectivement de 1,3 et 4 unités! Il faudra attendre la découverte des phases de Vénus par Galilée pour que ce phénomène soit compris.

L'œuvre de Ptolémée achève le développement de l'astronomie antique. Depuis le troisième siècle avant J.C., l'astrologie qui était née en Mésopotamie, vers la fin du cinquième siècle, a progressivement envahi le monde méditerranéen. Ce succès s'explique par la théorie pythagoricienne, reprise par Platon, Aristote et surtout les stoïciens, selon laquelle les astres sont de nature divine. De plus en plus, seuls les astrologues s'intéresseront aux choses du ciel. Les rares vrais astronomes se limiteront à donner des *commentaires* de Ptolémée dont l'autorité restera incontestée jusqu'à la fin du quinzième siècle, sauf par les disciples d'Aristote. ■

* * *

La théorie des épicycles I: Des origines à Hipparque:

Errata

1. Dans la figure A 2. Le point $S_1 \equiv G_1$ et le point $S_2 \equiv A_2$.

2. Egalement, lors de l'addition d'illustrations, on a glissé, page 5, un schéma de la théorie de l'épicycle totalement inapproprié aux mouvements planétaires. Dans celui-ci la période du mouvement relatif sur l'épicycle est la moitié de celle du mouvement sur le déférent. Ce choix très particulier ne correspond pas aux mouvements planétaires (voir p. 7, 3e colonne). Le mouvement ainsi obtenu rappelle dangereusement la trajectoire des planètes autour du Soleil. La trajectoire autour de la Terre est illustrée par la figure 3 et la reproduction dans la colonne centrale page 5.

[2] O. Neugebauer, 1975, A History of Ancient Mathematical Astronomy, Vol. 3, pg. 1096.