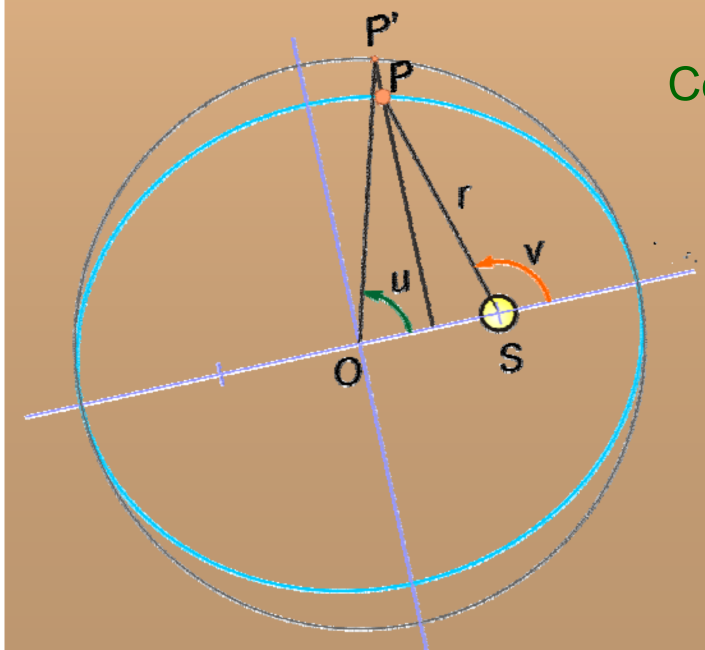
Voir

L'orbite de Kepler



Construire l'orbite par la résolution de l'équation de Kepler

Visualiser la loi des aires

Vérifier la 3ème loi

Tracer le vecteur vitesse

Animer la planète

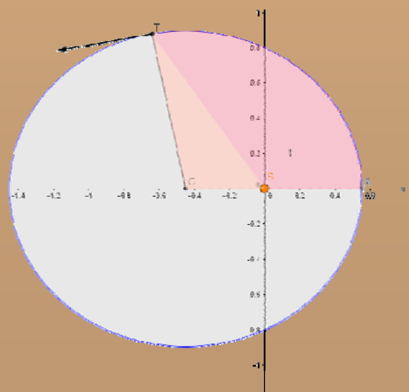
Cral – Obs. Lyon / PhM nov. 2016

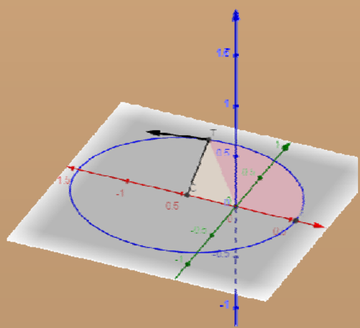
Construire l’orbite de la Terre et voir les lois de Kepler

- avec les paramètres des planètes
-en se référant aux lois de Kepler
- en utilisant les équations de leurs mouvements

il est possible de

- tracer leurs orbites (1ère loi)
- les placer en fonction du temps sur leurs orbites et animer
- visualiser et vérifier la loi de aires (2ème loi)
- vérifier la 3ème loi
- visualiser les vitesses et observer leurs variations.

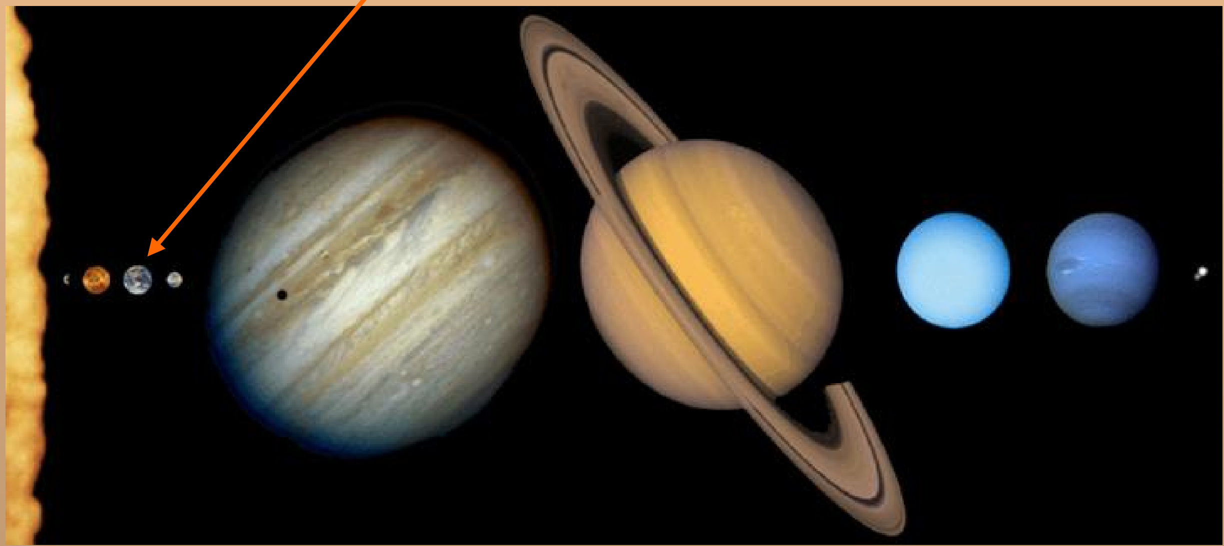




Pour le développement mathématique et physique voir :

document *orbite_terre.pdf*, Introduction.

La planète élue sera la Terre.



1 - Précisions de départ

Lancer Geogebra

Ouvrir le fichier *data_syssol.ggb*.

Le Soleil S sera le centre des coordonnées.

S = (0,0)

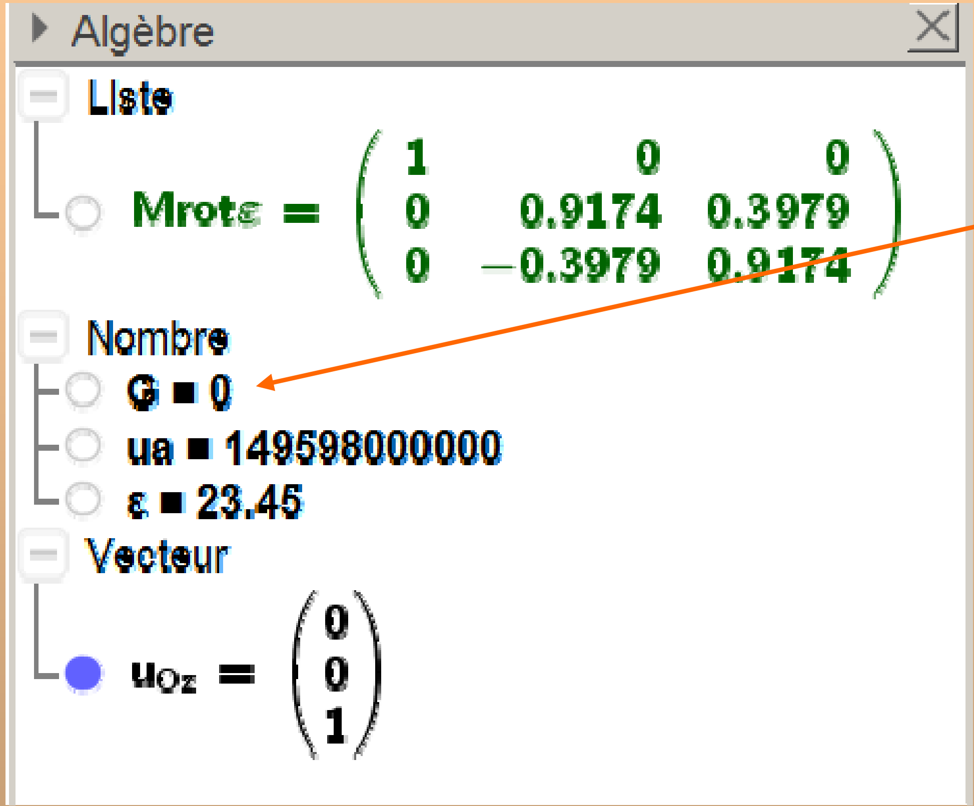
Le plan du graphique xSy sera le plan de l'orbite.

L'axe des abscisses sera le grand axe de l'orbite elliptique.

Pour être actuel, la plage de temps d'évolution sera sur deux ans du 1/01/2017 au 1/01/2019.

1-1 - Données

Données de base du graphique :



valeur cachée
$6.67259\ 10^{-11}$

Ajouter la période sidérale de la Terre : P_T = 365.256363

la masse du Soleil : M_S = 2*10^30

La matrice, le vecteur unitaire et ε peuvent être effacés.

1-1 - Données

Données de base astronomiques :

Orbites

Axes de rotation

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		*P (ans)*	*a*	*e*	*i*	*L2000.0*	*Ω*	*ϖ*	*Masse*	*R. equat.*
2	Mercure	0.24085	0.3871	0.20564	7.00498	252.25032	48.33077	77.4578	33000000...	2439700
3	Vénus	0.6152	0.72334	0.00678	3.39468	181.9791	76.67984	131.60247	48700000...	6051800
4	Terre	1.00002	1	0.01671	-0.00002	100.46457	0	102.93768	59700000...	6371000
5	Mars	1.88085	1.52371	0.09339	1.84969	-4.55343	49.55954	-23.94363	64200000...	3389500
6	Jupiter	11.86262	5.20289	0.04839	1.3044	34.39644	100.47391	14.72848	19000000...	69911000
7	Saturne	29.4475	9.53668	0.05386	2.48599	49.95424	113.66242	92.59888	56800000...	58232000
8	Uranus	84.01685	19.18916	0.04726	0.77264	313.23811	74.01693	170.95428	86800000...	25362000
9	Neptune	164.79132	30.06992	0.00859	1.77004	-55.12003	131.78423	44.96476	10200000...	25362000
10	Pluton	247.92065	39.48212	0.24883	17.14001	238.92904	110.30394	224.06892	13100000...	1151000
11	Soleil	11.86262	0.00465	0	0	0	0	0	20000000...	696000000
12										
13			*Incl. axiale*	*"North P...*	*"Rotation*	*Rot. ang.*				
14		*Révol.*	*°*	*"R.A. (°)*	*"Dec. (°)*	*(°/day)*				
15	Mercure	58.6462	0.01	281.01	61.45	6.14				
16	Vénus	-243.018	2.64	-272.76	-67.16	-1.48				
17	Terre	0.99727	23.4	0	90	360.99				
18	Mars	1.02596	25.19	317.67	52.88	350.89				
19	Jupiter	0.41354	3.12	268.06	64.5	870.54				
20	Saturne	0.44401	26.73	40.59	83.54	810.79				
21	Uranus	-0.71833	82.23	-257.31	15.18	-501.16				
22	Neptune	0.67125	28.33	299.4	42.95	536.31				
23	Pluton	-6.3872	60.41	-312.99	-6.16	-56.36				
24	Soleil	27.28	7.25	345.76	82.75					

Sauvegarder avec un nouveau nom.

1-1 - Données

Aparté sur les données glanées sur le web

Les périodes sidérales de révolution des planètes sont données soit en jours, soit en années, ou parfois sous les deux formes.

Le nombre de chiffres significatifs est souvent assez grand.

En collectant sur divers sites ces valeurs, il apparaît une dispersion assez grande.

L'année étant prise comme unité, le rapport période donnée en jour sur période en année devrait toujours avoir la même valeur, la période de la Terre en jours avec la précision que l'on connaît.

Ce qui n'est pas le cas.

Pour la fiabilité des calculs utiliser la valeur reconnue par l'IAU actuellement :

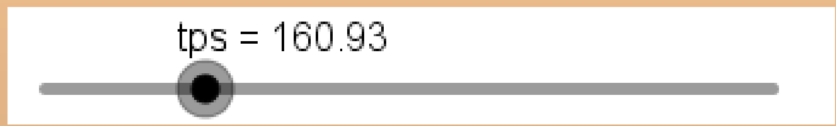
365.256363 jours

1-2 – Le curseur temps

Le temps et ses variations

Le temps variera à l'aide d'un curseur tps sur deux ans du 1er janvier 2017 au 1er janvier 2019

tps = Curseur[0, 2 * 365 + 1, 0.1]



Partie entière : jour

Partie décimale : heure en fraction de jour

hms = Reste[tps, 1] * 24

1-3 - L’affichage de la date et l’heure

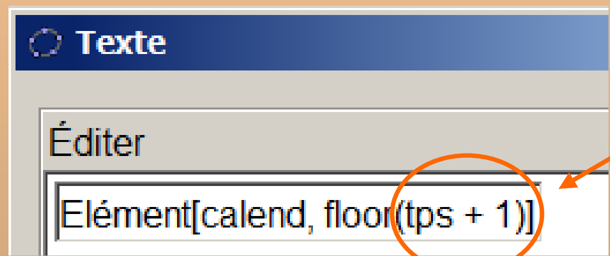
Afficher la date

Utiliser les textes « dates » cachés dans les cellules Z1 à Z732

Créer une liste calend = Z1:Z732

tps+1

Afficher date =>



à tps = 0,
première date

Créer un champ vide et mettre :

Elément[calend,floor(tps+1)]

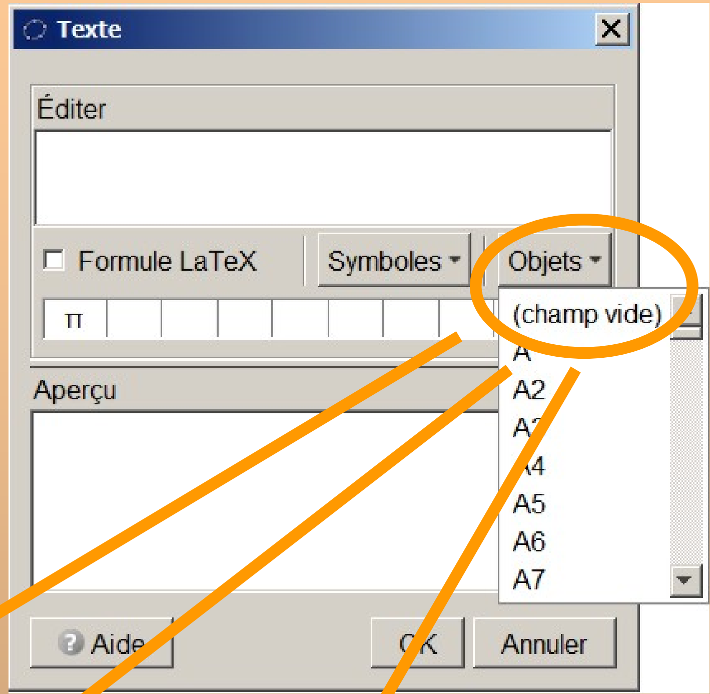
1-3 - L'affichage de la date et l'heure

Afficher l'heure

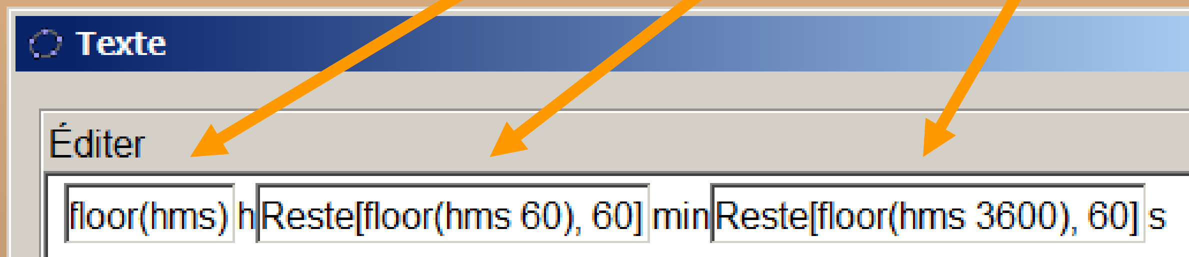
en heures, minutes et secondes

Dans l'éditeur de texte créer 3 champs vides pour les heures, les minutes et les secondes

1) heures : floor(hms)
2) minutes : Reste[floor(hms*60),60]
3) secondes : Reste[floor(hms*3600),60]



Afficher heure =>



1 heures

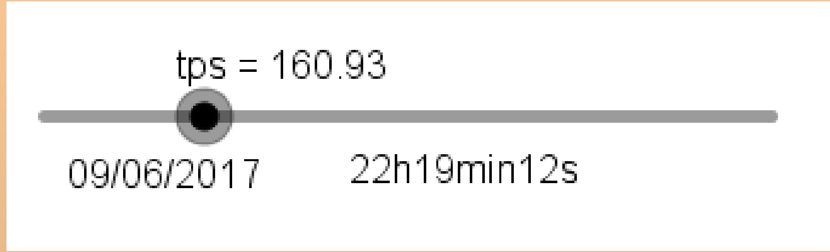
2 minutes

3 secondes

1-3 - L'affichage de la date et l'heure

Afficher l'heure

Résultat =>



Raffinement : si minutes ou secondes plus petites que 10, mettre un 0 devant les unités.

1-4 – Données de l’orbite

Position en longitude origine

Pour placer de façon réaliste la planète sur son orbite en fonction de la date, il nous faut :

- la longitude à la date origine (1er janvier 2017)

$$l_{2017} = 100.518639$$

- la date et la longitude au périhélie

$$t_{peri} = 3.32168$$

$$l_{peri} = 102.88510$$

Voir Annexe 5
Document :
Orbite_terre.pdf

A touver ou à calculer à partir des éphémérides.

http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?forms

http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons

1-4 – Données de l’orbite

Le demi-grand axe

A prendre dans la partie tableur.

Avec le choix de la Terre :

$$a = C4$$

1-4 – Données de l'orbite

L'excentricité variable

L'excentricté de la Terre est à prendre dans la cellule D4.

Mais il est important de voir l'évolution de la forme de l'orbite avec l 'excentricité et de pouvoir la faire varier.

On peut créer un curseur qui donne directement l'excentricité.

Si le curseur donnait directement l'excentricité, on ne saurait, lorsque l'on veut revenir à celle de la Terre où se positionner.

Astuce : création d'un curseur allant de 0 à 10, mais lorsqu'il vaut l'unité, l'excentricité vaut celle de la Terre e_T.

curseur	0	1	10
excentricité	0	e_T	1

Petit exercice mathématico-geobraesque

1-4 – Données de l’orbite

L’excentricité variable

La plage du curseur va de 0 à 10.

Voir l’annexe 3 du texte orbite_terre.pdf
- côté mathématique
- côté calcul matriciel

Objets Geogebra :

Curseur : g_e = Curseur[0, 10, 0.1]

Coeff. auxiliaires :

c1 = (100*D4-1)/90
c2 = D4-c1

Formule de l’excentricité : e = c2 * g_e^2 + c1 * g_e

2 - Résolution de l'équation de Kepler

Enfin le vrai départ

2-1 - L'anomalie moyenne M

Rappel de la formule : $M = \frac{360}{P}(t - t_0)$

M = 360 / P_T (tps - t_{peri})

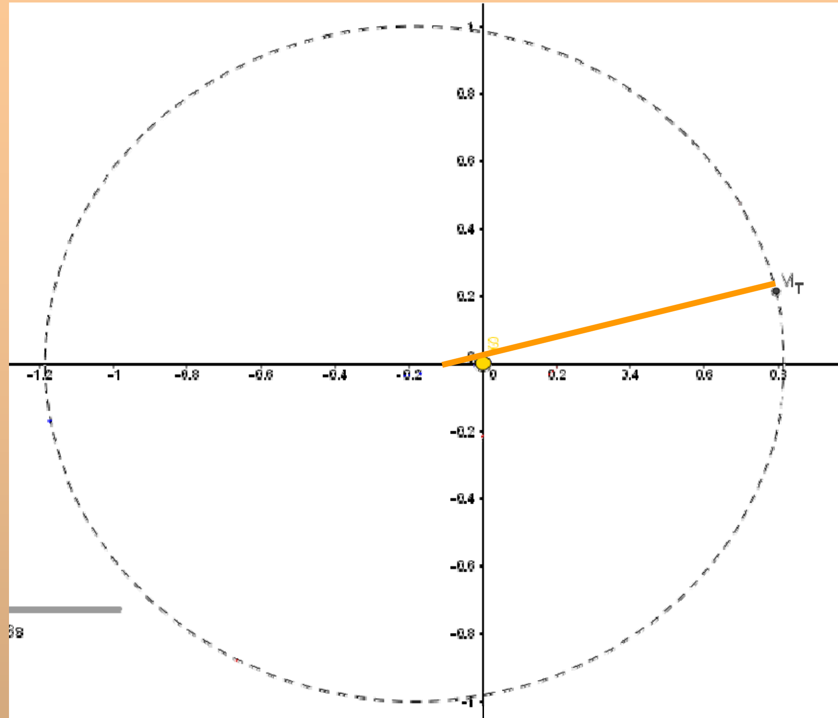
On peut visualiser la trajectoire de la planète fictive T_M.

Cette planète fictive a même demi-grand axe et même période que la Terre réelle.

Attention, son cercle de rayon a n'est pas centré sur l'origine, mais en O = (-a*e,0).

2 - Résolution de l'équation de Kepler

2-1 - L'anomalie moyenne M



Cercle orbite :

c_M = Cercle[O,a]

Le point figuratif de M :

M_T = (a; M°) + O

ou

M_T = Translation[(a; M°), O]

ou

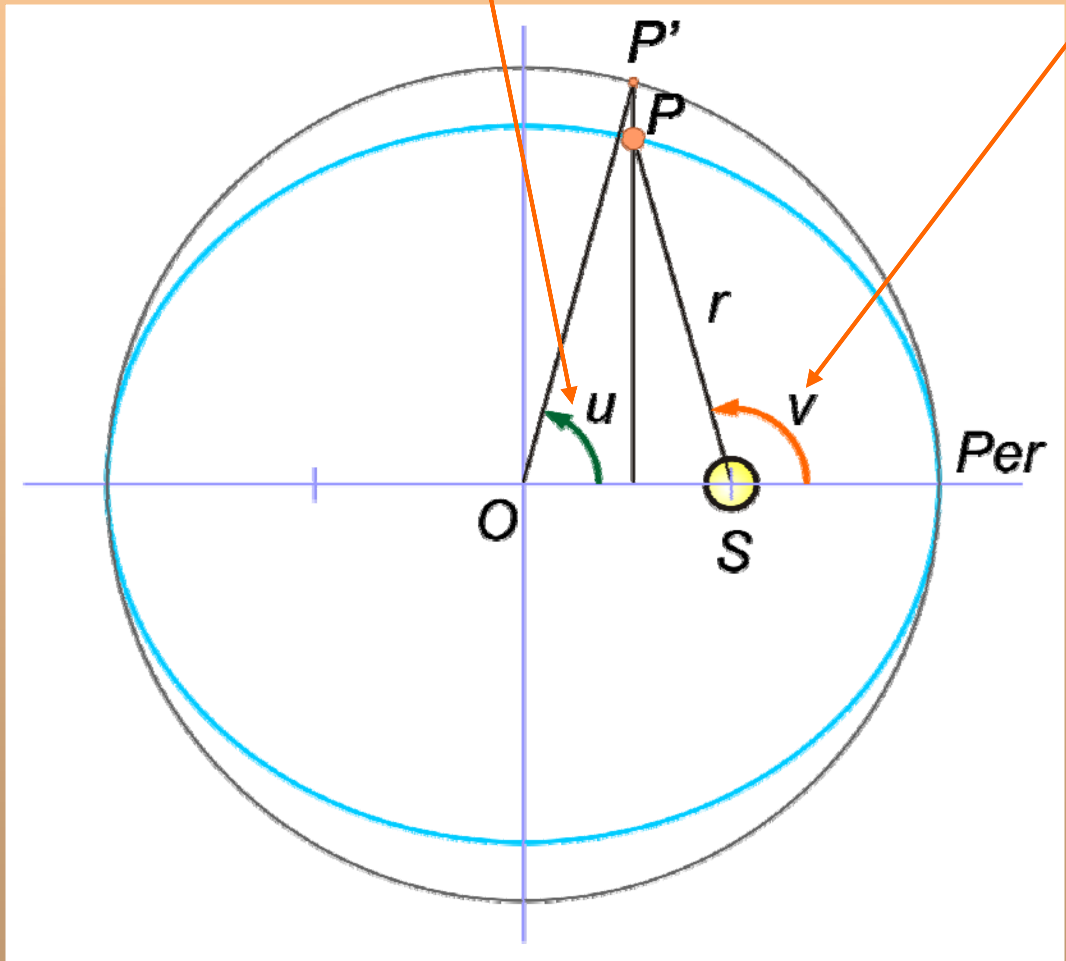
M_T = Translation[(a; M°), Vecteur[S,O]]

Rayon vecteur :

r_M = segment[O,M_T]

2 - Résolution de l'équation de Kepler

2-2 - L'anomalie excentrique et l'anomalie vraie



Equation de Kepler

$$u - e \sin u = M$$

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{u}{2}$$

Les formules magiques !

2 - Résolution de l'équation de Kepler

2- 2 - L'anomalie excentrique

L'équation de Kepler se réécrit :

$$\underbrace{\boxed{u - M}}_{f1} = \underbrace{\boxed{e \sin u}}_{f2}$$

Création des deux fonctions et leur intersection

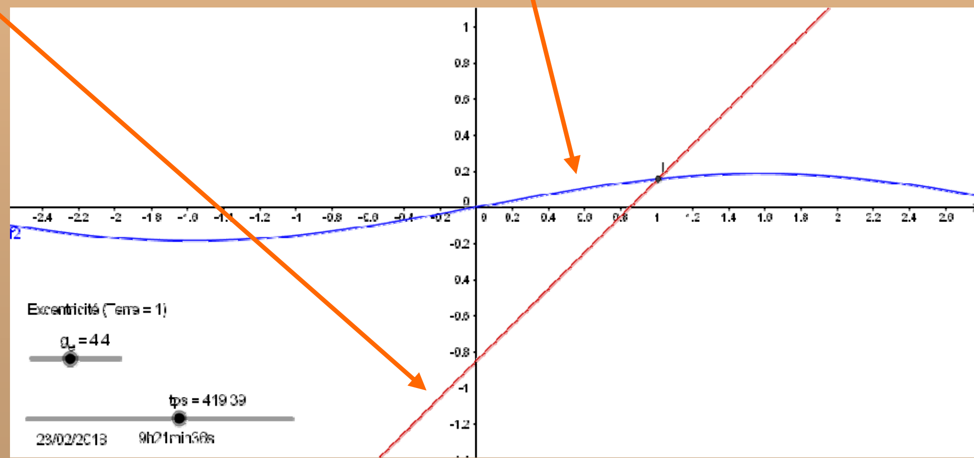
f1(u) = u - Reste[M, 360]°

f2(u) = e sin(u)

Intersection

I = Intersection[f1, f2]

Abscisse de I = égalité des deux fonctions



Extraction anomalie excentrique

$u = x(I)\ 180 / \pi$

2 - Résolution de l’équation de Kepler

2-2 - L’anomalie vraie

Application de la formule $\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$

v = 2 arctan(sqrt((1 + e) / (1 - e)) tan((u / 2)°)) 180 / π

2-3 - Le module du rayon vecteur

$$r=\frac{a\left(1-e^{2}\right)}{1+e\cdot\cos v}$$

r = a (1 - e²) / (1 + e cos(v°))

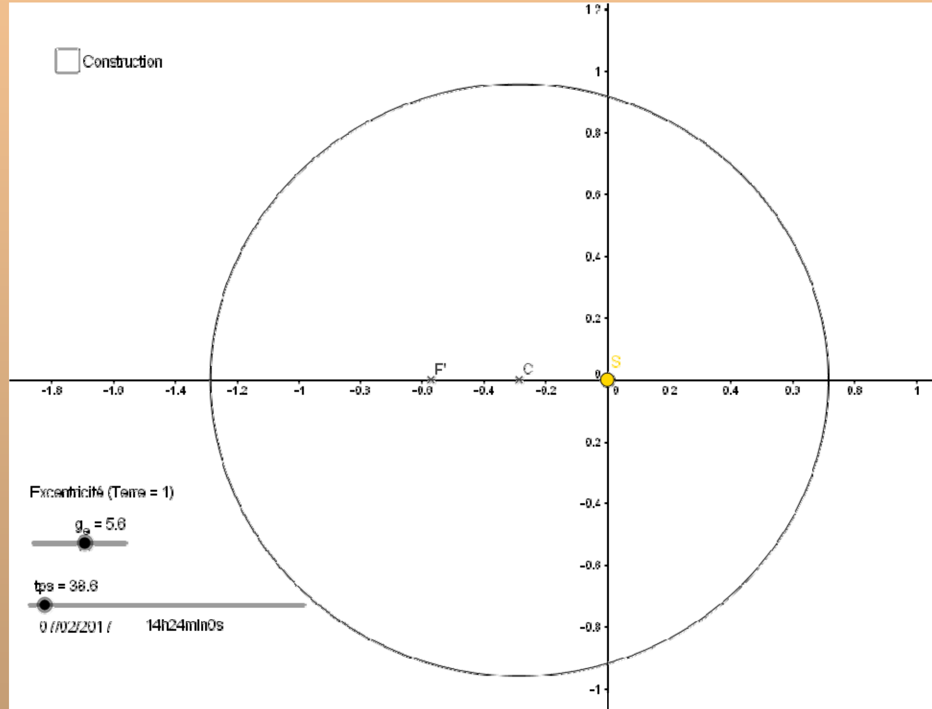
Créer une boîte de sélection « Construction » pour la visibilité ou non de f1, f2, I, c_M, r_M et M_T.

3 - Construction de l’orbite

3-1 - Tracé de l’ellipse de l’orbite

L’ellipse se construit à partir des coefficients a, c, e, et des foyers.

c = a * e



Premier foyer : le Soleil

S = (0,0)

Deuxième foyer

F' = (-2*c, 0)

Tracé de l’ellipse

ell_T = Ellipse[S,F',a]

On placera le périhélie : A =(a-c,0)

3 - Construction de l’orbite

3-2 - La planète animée

Position du point T en coordonnées polaires

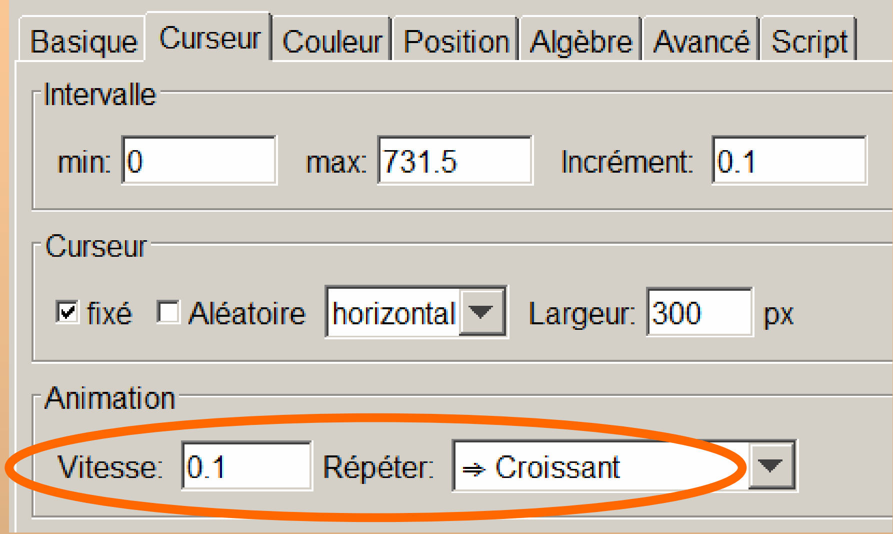
T = (r ; v°)

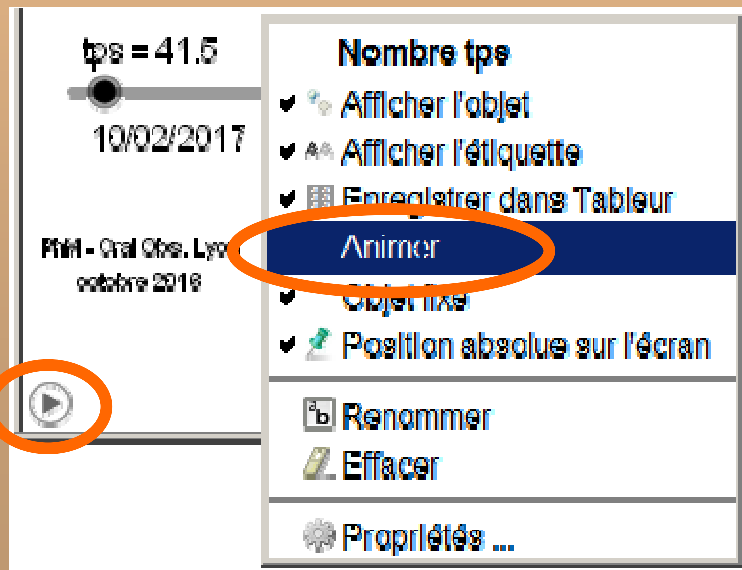
Rayon vecteur

sgT = Segment[S,T]

Pour faire avancer la Terre,
animer le curseur tps :
- vitesse de 0.1
- sens croissant.

Bouton Marche-Arrêt





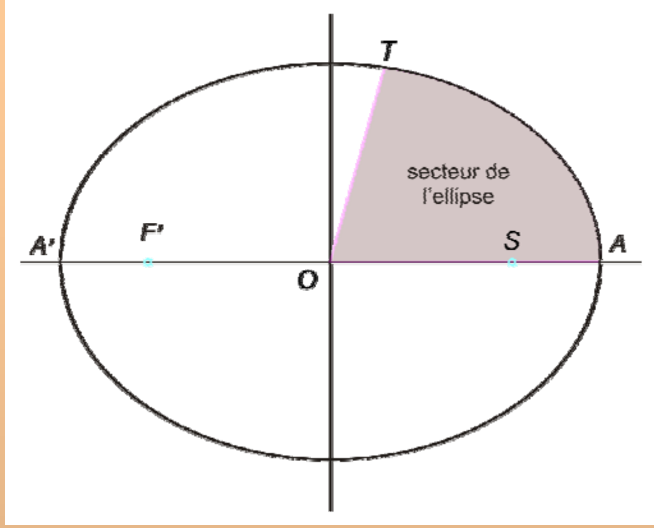
4 - Loi des aires

4-2 - Calcul de l'aire balayée

Construction de l'aire balayée.

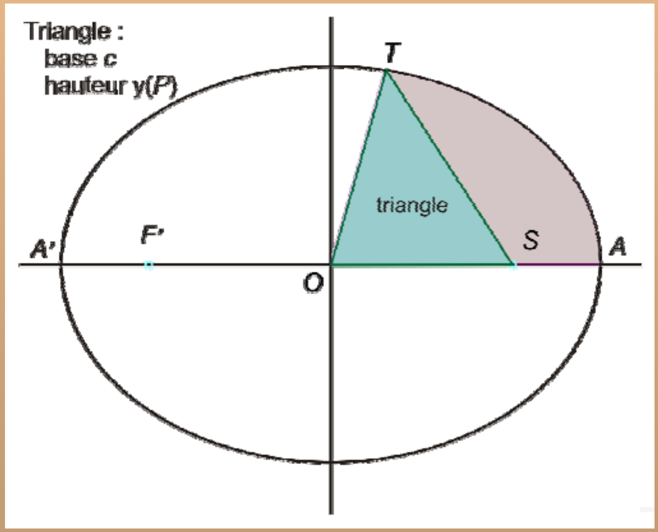
Geogebra sait calculer l'aire d'une partie d'ellipse à partir du grand axe et du centre

A_{sect} = Secteur[ell_T, A, T]



Soustraire la surface du triangle OTS :

A_{tri} = y(T) c / 2



Attention, l'aire est orientée :

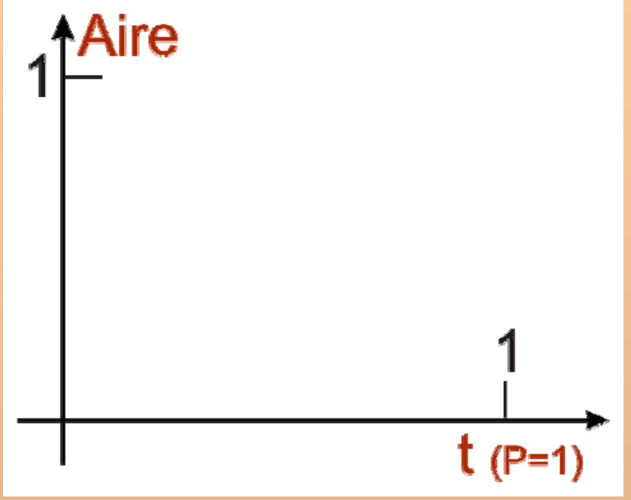
- soustraction de 0° à 180°,
- ajout de 180° à 360°

On normalisera à 1 la surface de l'ellipse (S= π a b) :

Aire = (A_{sect} – A_{tri}) / (pi * a* sqrt(a^2 – c^2))

4 - Loi des aires

4-3 – Graphique du tracé



La valeur de l'aire balayée est portée dans un graphique en fonction de la phase, la période étant normalisée à 1.

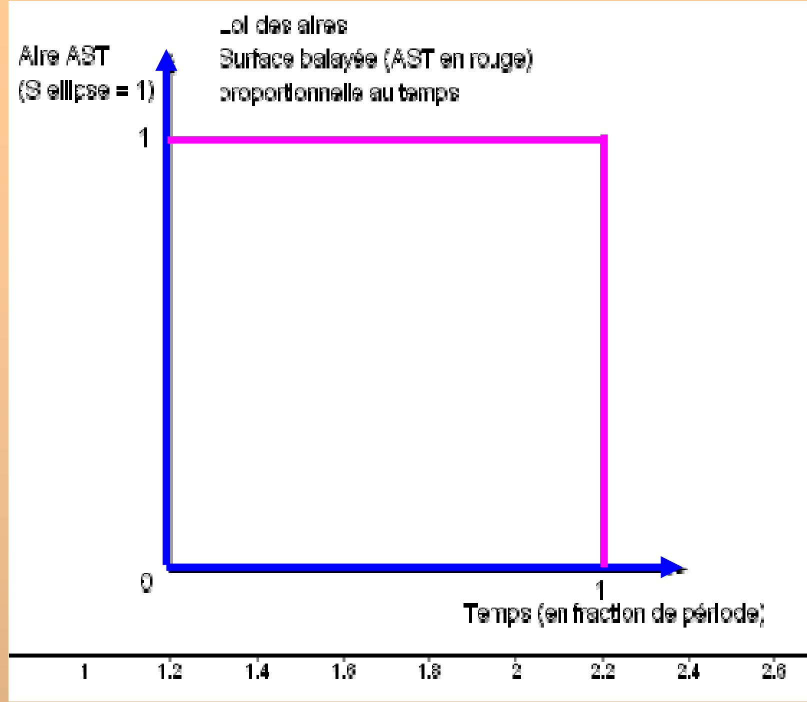
Abscisses : temps en fraction de période (phase)

Ordonnées : surface balayée Aire de 0 à 1 (1 = surface de l'ellipse)

Pour la clarté du graphique, son origine sera décalée en (x0, y0)

x0 = 1.2
y0 = 0.2

4 - Loi des aires



4-3 - Graphique du tracé

Exemple de tracé des repères.

Les textes ne sont pas mis en position absolue sur le graphique pour suivre si l'on zoome.

Axe des abscisses

d_x = Vecteur[(x0, y0), (x0 + 1.2, y0)]

Axe des ordonnées

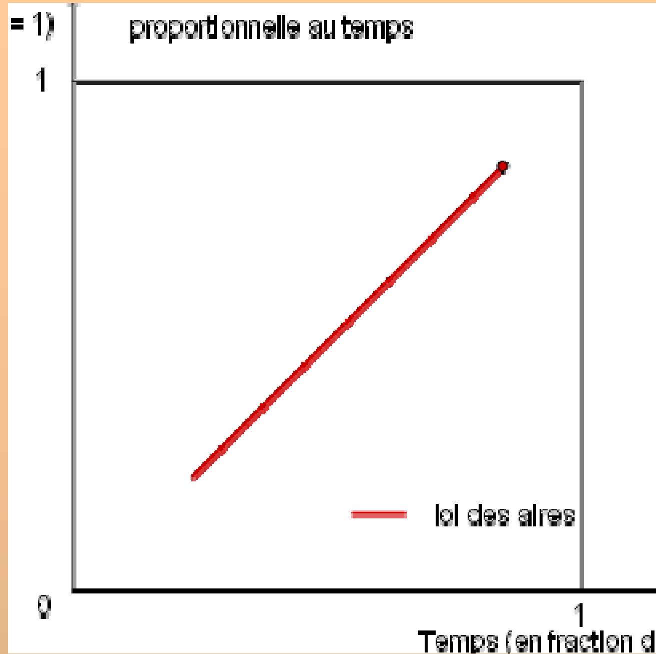
d_y = Vecteur[(x0, y0), (x0, y0 + 1.2)]

Traits repères

sx1 = Segment[(x0 + 1, y0), (x0 + 1, y0 + 1)]
sx2 = Segment[(x0, y0 + 1), (x0 + 1, y0 + 1)]

4 - Loi des aires

4-4 - Point représentatif de l’aire



Abscisse : x0 + Reste[tps, P_T] / P_T

Ordonnée : y0 + Aire

Point représentatif :

K_2 = (x0 + Reste[tps, P_T] / P_T, y0 + Aire)

Affichage de la trace du point :

On crée une image de K_2 :

K'_2 = K_2

Point K_2 : dimension 1, trace affichée, sans label

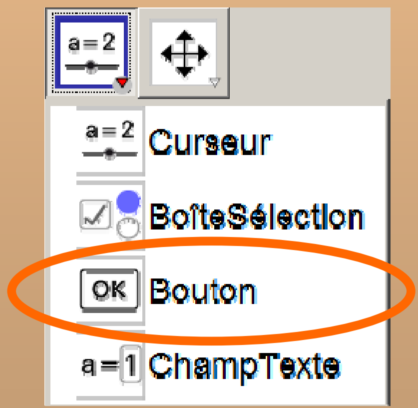
Point K'_2 : dimension 3, sans label, couleur au choix

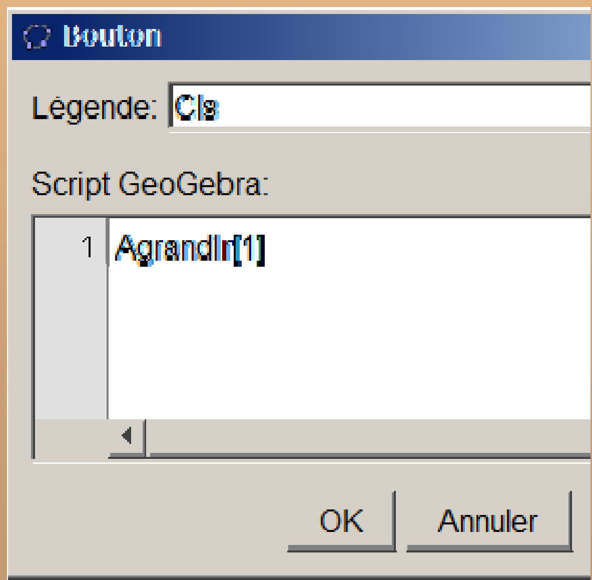
4 - Loi des aires

4-5 - Finition graphique

Créer une boîte de sélection de label « Loi des aires » qui englobe tout le tracé de la loi des aires : textes, traits, points

Pour réinitialiser la trace, créer un bouton pour cette fonction.





5 - Troisième loi

5-1 – Expression de la 3ème loi

Cette partie utilisera le Graphique 2 de Geogebra

Les données sont prises dans la partie tableur.

	A	B	C
1		*P (ans)*	*a*
2	Mercury	0.2408467	0.38709927
3	Venus	0.6151972600...	0.72333566
4	Earth	1.0000174	1.00000261
5	Mars	1.8808476	1.52371034
6	Jupiter	11.862615	5.202887
7	Saturn	29.447498	9.53667594
8	Uranus	84.016846000...	19.1891646
9	Neptune	164.79132	30.0699228
10	Pluto	247.92065	39.4821168

Soit la troisième loi de Kepler : $\dfrac{a^3}{P^2}$

Expression logarithmique de la 3ème loi :

$$\log a = \frac{2}{3} \log P - K'$$

qui est une relation linéaire de log a et log P

Construire les deux listes :

logP = log(B 2:B10)

loga = log(C2:C10)

5 - Troisième loi

5-2 - Représentation graphique

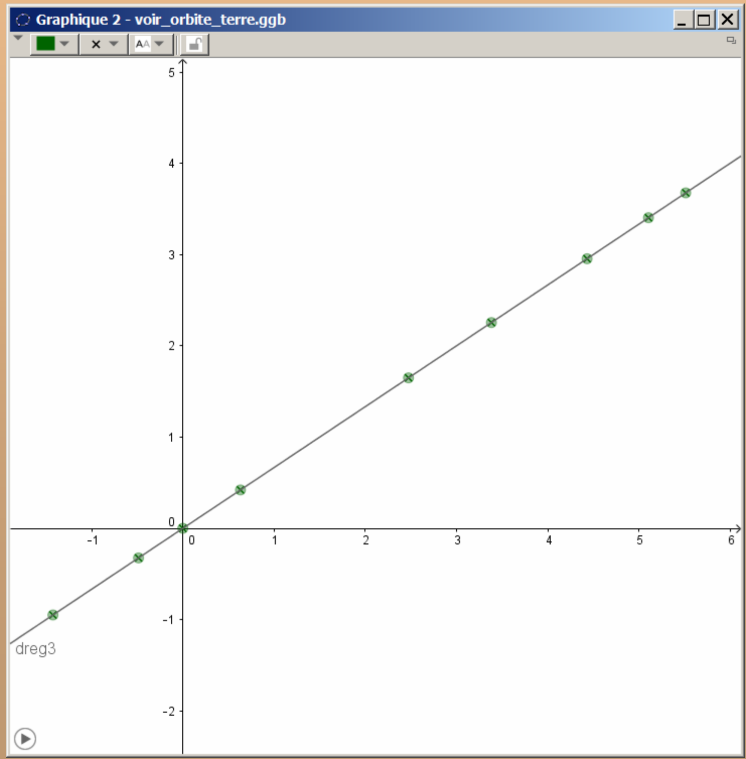
Points représentatifs :

P3 = séquence[(Elément[logP, i], Elément[loga,i]),
i,1,Longueur[logP]]

Tracer la régression linéaire

dreg3 = AjustPoly[P3, 1]

Exrcice facultatif : évaluer la précision.



6 - Vecteur vitesse

6-1 - Module de la vitesse

Cacher le Graphique 2, revenir au Graphique 1.

Le module de la vitesse peut être calculé de deux façons :

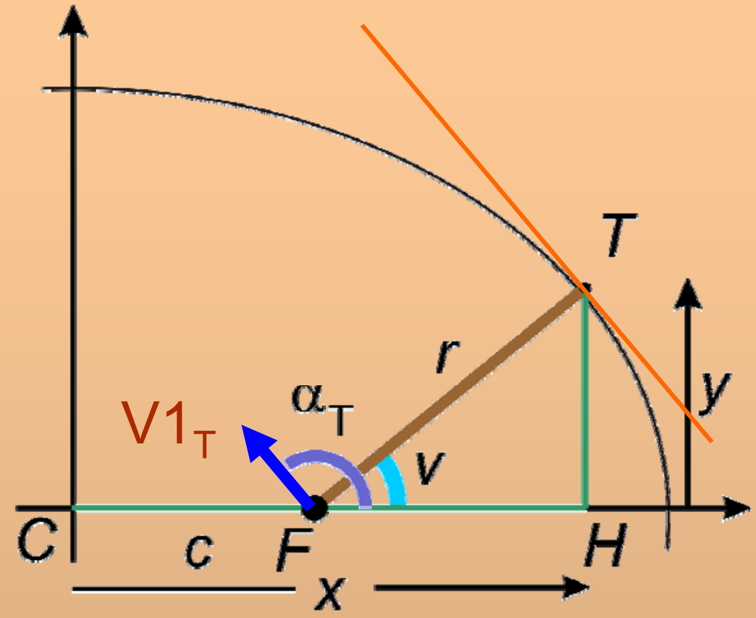
$$V^2 = G\,M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad V^2 = \frac{GM}{p}\left(1 + 2\,e\,\cos v + e^2\right)$$

Expression sous Geogebra (en km/s) :

Vmod_T = sqrt(G*M_S*(2 / r - 1 / a)/ ua) / 1000

6 - Vecteur vitesse

6-2 - Direction et vecteur unitaire



Pente de la tangente à l'ellipse :

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Expressions sous Geogebra :

x_T= r cos(v°) + c

y_T= r sin(v°)

Par la fonction arc tangente, y' ne donne l'angle qu'à 180° près.

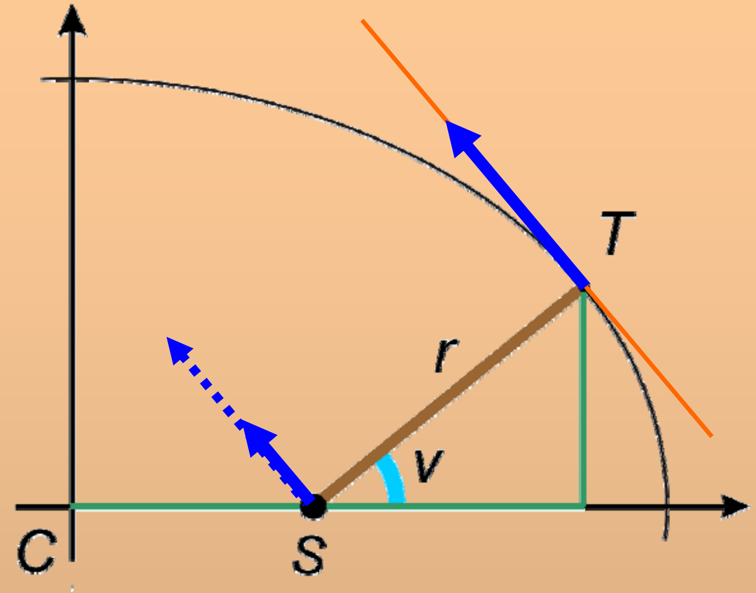
Test par rapport au signe de y pour lever l'ambiguité :

α_T = arctan(-(1 - e²) x_T / y_T) 180 / π + Si[y_T > 0, 180, 0]

V1_T = Vecteur[(cos(α_T°), sin(α_T°))]

6 - Vecteur vitesse

6-3 - Visualisation du vecteur vitesse



V_T = V1_T * Vmod_T

Pour s'adapter au graphique, son module est divisé par 100

Pour le placer en T, il est translaté du vecteur ST

V_T = Translation[V1_T * Vmod_T / 100, T]

6 - Vecteur vitesse

6-4 - Variation et visualisation du module vecteur vitesse

Dans le graphique Loi des aires, mettre un point P_V

- abscisse : x(K_2)
- ordonnée : $\dfrac{\text{module de la vitesse}}{\text{module vitesse au périhélie}}$

Vitesse maximale au périhélie

$$r_{péri} = a(1\text{-}e) \qquad V = \sqrt{G\,M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$V_{péri} = \sqrt{G\,M\,\frac{1}{a}\,\frac{1+e}{1-e}}$$

vmax = sqrt(G M_S (1+e) / (1-e) / (a * ua)) / 1000

6 - Vecteur vitesse

6-4 - Variation et visualisation du module vecteur vitesse

Le point représentatif du module de la vitesse sera porté dans le même graphique que celui de la Loi des aires.

Construction du point :

P_V = ((x(K2), y0+Vmod_T/vmax))

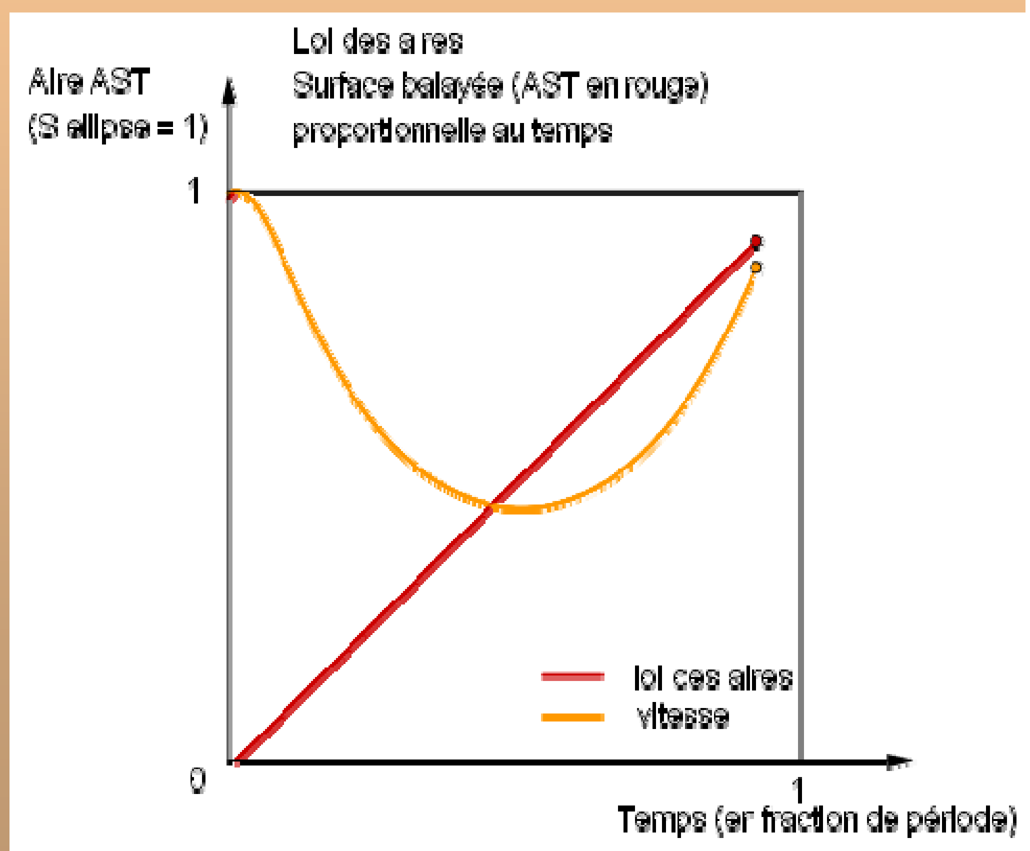
Taille 1 et affichage de la trace.

P_V ' = P_V

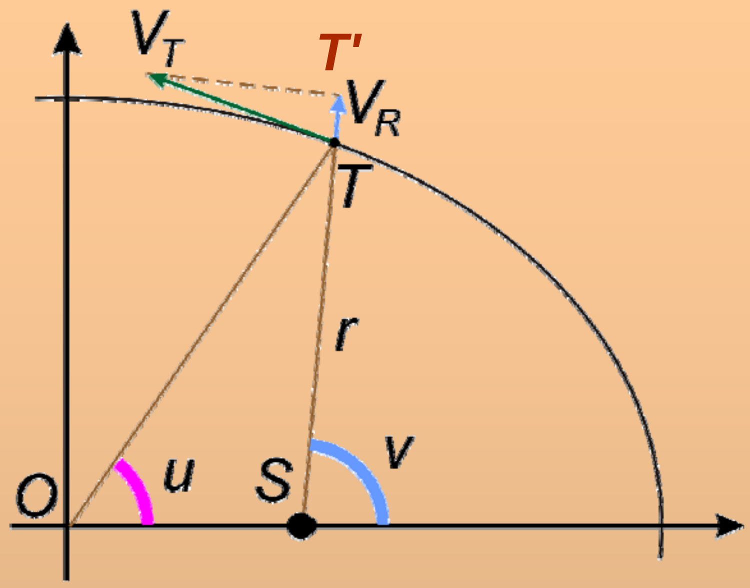
Taille 3 sans affichage trace.

Mettre une couleur.

Observer, les changements avec l'excentricité.



6 - Vecteur vitesse



6-5 - Vitesse radiale

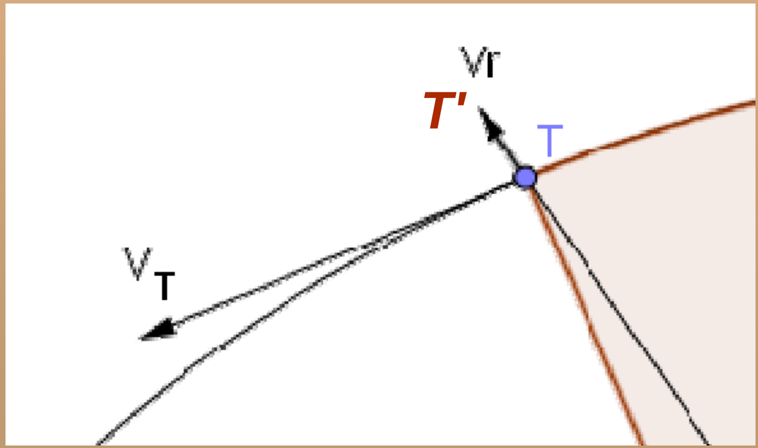
Projection du vecteur vitesse V_T sur le rayon vecteur ST.

On crée le point T', intersection de ST et de la perpendiculaire à ST depuis l'extrémité du vecteur vitesse.

T' = Intersection[Droite[S,T], Perpendiculaire[T+V_T , Droite[S,T]]]

Vecteur vitesse radiale :

Vr = Vecteur[T, T']



Vecteur vitesse

6-5 - Vitesse radiale

Valeur de V_{R} :

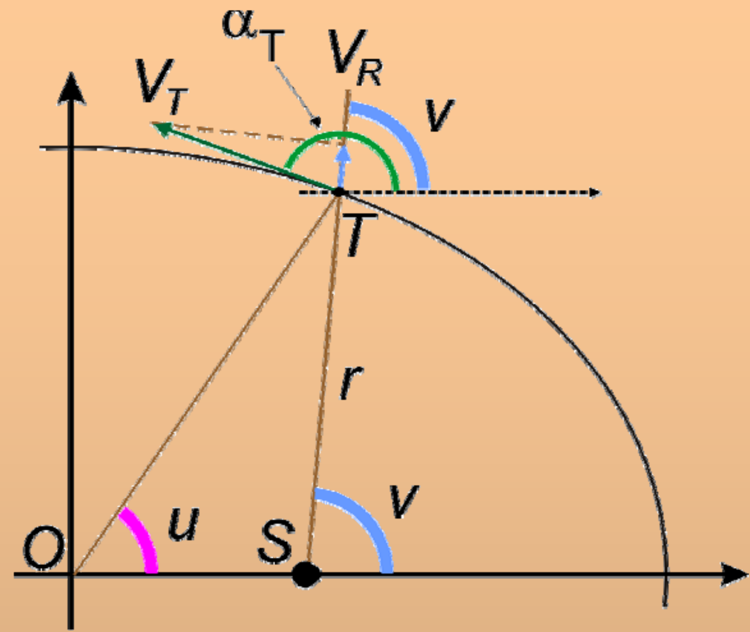
V_R = Vmod_T * cos((α_T – v) °)

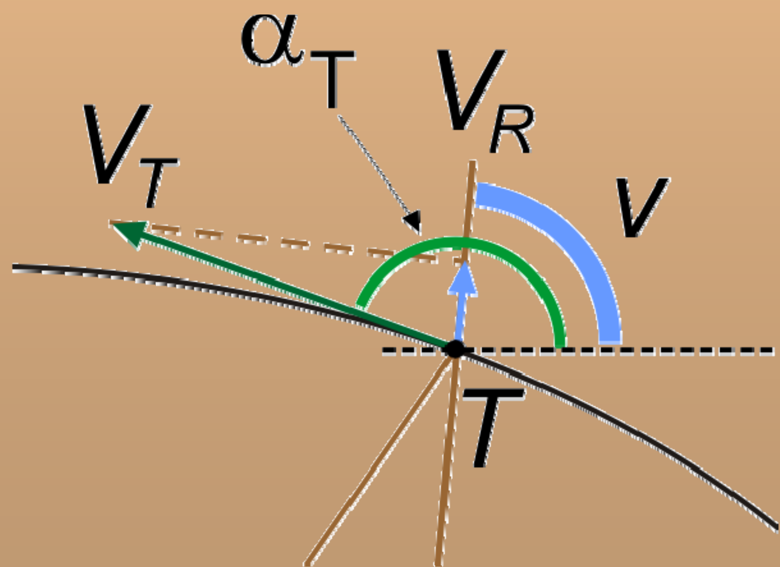
A observer :

- Les changements de sens et de grandeur de cette vitesse
- La position remarquable du maximum de cette vitesse radiale.

Le signe de V_R indique comme en spectroscopie, l'éloignement ou l'approche

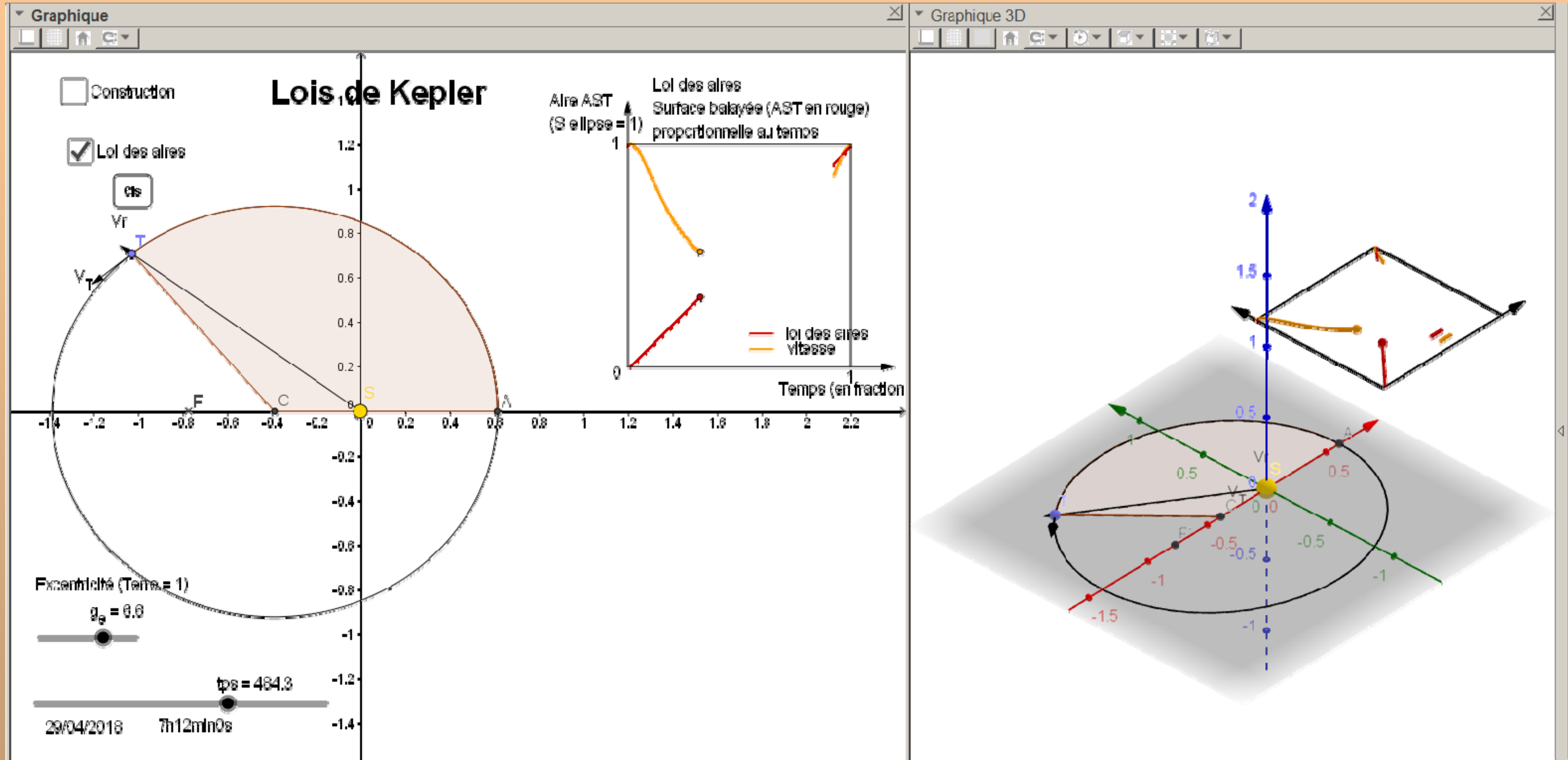
- positif : la planète s'éloigne
- négatif, elle se rapproche





7 - Vision 3D

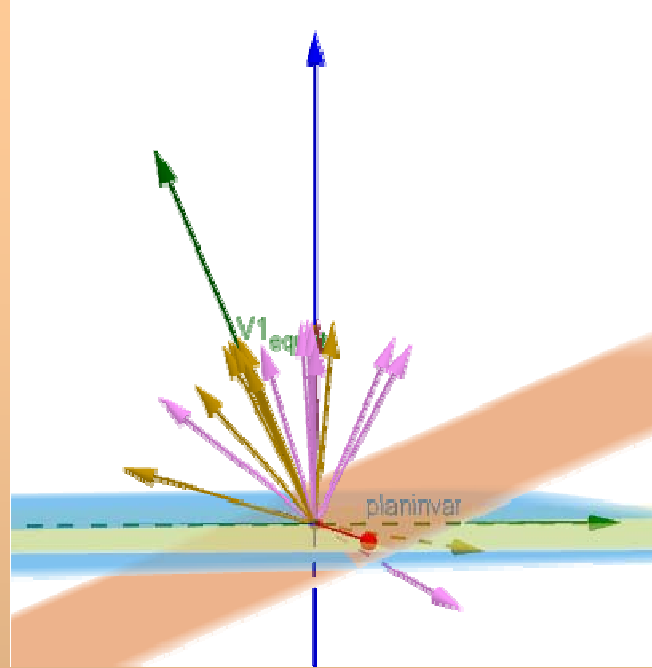
Afficher le Graphique 3D.



Le bouton Cls ne marche pas pour le 3D. Il faut faire CTRL F.

Autres TD complémentaires

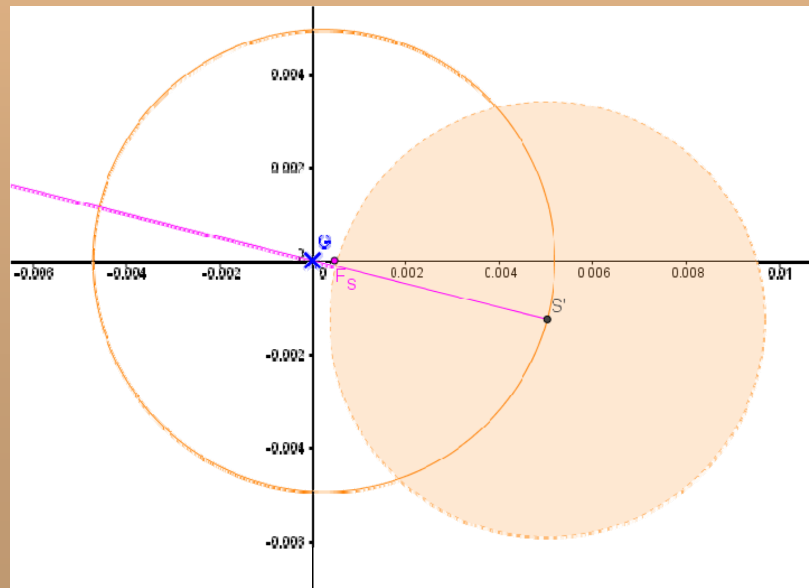
Le plan invariable



Un plan référence stable basé sur la conservation du moment cinétique du Système solaire.

Calculs vectoriels, rotations, changements de coordonnées et tracés en 3D.

Soleil jupitérien



Extension des orbites de Kepler au système Soleil Jupiter où Jupiter joue le rôle d’exoplanète pour un observateur lointain.

En...

Fin