DES FORCES CENTRIPETES ET CENTRIFUGES,

Considerées en général dans toutes sortes de Courbes, & en particulier dans le Cercle.

PAR M. BOMIE.

Monsieur Hugens est le premier, que je sçache, qui nous ait donné l'idée des Forces Centripetes ou Centrifuges, dans son excellent Livre *de Horologio oscillatorio*. M. Newton aprés lui a traité de ces Forces plus à fond. Aprés eux M. Varignon a donné des Methodes infiniment générales sur cette matiere dans differentes Pieces répanduës dans les Memoires de cette Academie. 1707. 3. Aoust.

Le nouveau Systême, ou la nouvelle explication du mouvement des Planetes est entierement fondée sur cette idée, & c'est la consideration de ces sortes de Forces, qui donne occasion à l'Auteur de ce Livre, d'expliquer les mouvemens des corps celestes d'une maniere fort ingenieuse.

M. Newton dans son Livre *de Principiis Mathematicis Philosophiæ naturalis* Livre 1. Section 2. Theorême 4. démontre le raport des Forces Centripetes dans deux cercles differens. Comme il m'a paru que cette démonstration avoit beaucoup de rapport avec le principe fondamental du nouveau Systême, dont je viens de parler, & que d'ailleurs le Theorême de M. Newton & le principe fondamental de M. Villemot sont d'une grande consequence & dans la Physique & dans l'Astronomie, j'ai crû qu'on verroit avec plaisir ces deux Propositions déduites fort naturellement d'une Proposition beaucoup plus generale, & beaucoup plus simple.

Comme tout ce que je dois démontrer roule sur les

Forces Centripetes ou Centrifuges, il ne sera pas inutile d'en donner une notion distincte.

Si l'on suppose qu'un corps se meut sur la circonference d'un cercle, c'est à dire sur un poligone d'une infinité de côtés: Il est évident que ce corps décrira à chaque instant un de ces petits côtés, & que par consequent ce corps tendra dans tous les instans à s'échaper suivant la direction de ces petits côtés; de cet effort il en résulte necessairement un autre qui est celui de s'éloigner du centre, & c'est cet effort résultant qu'on appelle Force Centrifuge.

Si l'on conçoit à present une force continuellement appliquée à ce corps qui à chaque instant l'oblige à se détourner, & à parcourir par ces détours infinis la circonference du cercle, cette force ainsi appliquée continuellement s'appelle Force Centripete.

Il suit de ces deux notions qu'on peut prendre indifferemment la Force Centripete pour la Force Centrifuge, & réciproquement; puisque ces deux forces sont toûjours égales entr'elles.

La notion que je viens de donner de ces sortes de forces se peut entendre des Forces Centripetes, ou Centrifuges considerées dans toutes sortes de lignes courbes; & je ne l'ai expliquée dans le cercle, que parce qu'étant plus connu, il m'a paru le plus propre à fixer l'imagination dans cette sorte de matiere.

Ayant ainsi défini les Forces Centripetes ou Centrifuges, je démontre cette Proposition generale.

PROPOSITION GENERALE.

Si un corps roule sur une ligne courbe quelconque *APG*, en sorte que cherchant continuellement à s'échaper par la tangente infiniment petite *PQ*, il soit obligé de décrire la portion infiniment petite *PG* de la ligne courbe par une force quelconque tendante au centre *C* pris à volonté; je dis que la force Centripete que j'appelle (*f*) sera toûjours à une quantité constante (*a*), comme la petite ligne *GQ* au quarré du tems.

REMARQUE.

Les temps peuvent toûjours être exprimés par les secteurs infiniment petits PCG, c'est-à-dire par $PC \times GH$, ou bien ayant continué la tangente infiniment petite PQ, & abaissé du centre C la perpendiculaire CS par $PQ \times CS = PG \times CS$.

SUPPOSITION PREMIERE.

Je suppose pour cette démonstration que les effets sont proportionnés à leurs causes, c'est-à-dire que si une certaine force cause un mouvement comme (m), le double de cette force causera $(2m)$, le triple $(3m)$ &c. & cela suivant la direction de cette force.

SUPPOSITION SECONDE.

Je suppose en second lieu que les espaces infiniment petits parcourus par une force constante & constamment appliquée, sont entr'eux comme les quarrés des temps.

DEMONSTRATION.

Si un corps se meut suivant la ligne AB, & qu'une force constante & constamment appliquée oblige ce corps à parcourir les espaces infiniment petits Abc, ABC, dans des temps exprimés par les lignes Ab, AB; ces petits espaces Abc, ABC pouvant passer pour des triangles rectilignes & semblables, seront entr'eux comme Ab^2 à AB^2. *Ce qu'il falloit trouver.*

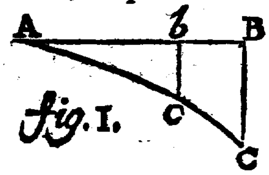

Fig. I.

Ceci étant supposé, je démontre la Proposition generale.

DEMONSTRATION.

Il est clair que la petite ligne GQ dans un temps déterminé, est comme la Force Centripete (f) (par la premiere Supposition). Mais (f) étant determinée, la même ligne est comme le quarré du temps (par la seconde Supposition) ; c'est-à-dire, si on appelle le temps (t) & (dt) un instant comme (dt^2) ; donc si la force & le temps sont indéterminées, QG sera comme le produit de la force par le quarré du temps, c'est-à-dire, comme $f\,dt^2$. donc $GQ : f\,dt^2$. donc $\frac{GQ}{f} : dt^2$. donc $\frac{a}{f} : \frac{dt^2}{GQ}$. donc $f : a :: GQ : dt^2$. Mais $dt^2 = CP^2 \times GH^2 = PG^2 \times CS^2$. donc $f : a :: GQ : CP^2 \times GH^2$, ou $PG^2 \times CS^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

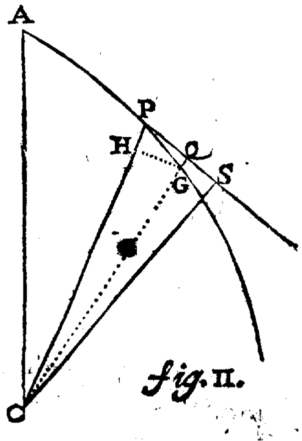

Fig. II.

COROLLAIRE.

Il suit des deux Suppositions que les espaces parcourus avec des forces constantes & continuellement appliquées, sont comme le produit de ces forces & des quarrés des temps.

Cette Proposition est generale, & peut s'étendre à toutes les Courbes, en connoissant le raport de tous leurs points au centre C.

Il est clair que si on suppose la Courbe toûjours concave du même côté, & le point C hors de cette Courbe, la Force Centripete se changera en Centrifuge.

Donc dans les Courbes qui sont tantôt concaves & tantôt convexes du même côté, la petite ligne GQ où la Force Centripete devient égale à zero ou à l'infini dans le point d'inflexion, c'est-à-dire dans le point dans lequel la Force Centripete se change en Centrifuge, & réciproquement.

Si C est un foyer de quelque Section Conique, comme le raport de tous les points de la Section au foyer C est aisé à connoître, il sera aussi facile de déterminer dans tous les points la Force Centripete qui tend à ce foyer.

Mais comme mon but principal est de parler de ces sortes

sortes de forces considerées dans le cercle, je me contenterai d'y appliquer la Proposition générale aprés que je l'aurai déterminée d'une maniere plus simple par raport à cette Courbe.

Pour la démonstration des Forces Centripetes & Centrifuges considerées particulierement dans le cercle, j'ay besoin d'un Lemme, & d'une Définition connuë de tout le monde.

LEMME.

Soit un cercle *AFM* son diametre quelconque *AD*, si l'on prend l'arc *AF* infiniment petit, & que l'on mene par l'extrémité du diametre *D* & par le point *F* la ligne *DFH* terminée en *H* à la tangente menée par le point *A*; je dis que le petit arc *AF* sera toûjours moïen proportionnel entre le diametre *DA*, & la partie *FH* de la ligne *DH* comprise entre le cercle & la tangente.

La Démonstration en est évidente, puisque *DF* ou $DA : AF :: AF$ est à *FH*.

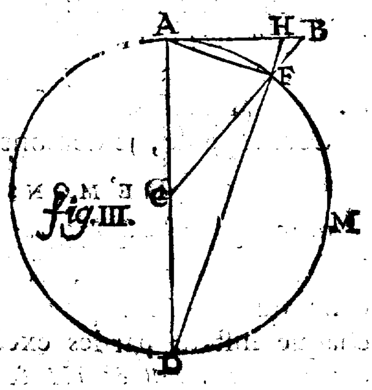

fig. III.

Les mêmes choses étant posées, si l'on mene du centre *C* la secante *CFB*, il est évident que l'angle *HFB* étant infiniment petit, *FH* sera $= FB$; donc on aura $DA : AF :: AF : FH$ ou FB; donc FB sera $= \frac{AF^2}{DA}$, & sera toûjours comme $\frac{AF^2}{CA}$.

DÉFINITION.

La vitesse est toûjours exprimée par l'espace divisé par le tems; ainsi supposant l'espace (*s*) le tems (*t*) la vitesse *v*), on aura toûjours $\frac{s}{t} = v$.

PREMIERE CONSEQUENCE.

Donc si les tems sont égaux, les vitesses seront comme les espaces.

SECONDE CONSEQUENCE.

Donc ces vitesses pourront être exprimées par ces espaces.

PROPOSITION.

Dans tout le cercle la Force Centripete est toûjours égale au quarré de la vitesse qui sert à le décrire, divisé par le rayon.

Je considere la Force Centripete dans le cercle comme tendante continuellement au centre du cercle, quoiqu'on la puisse considerer comme tendante à tout autre point : Mais dans le cas du Theorême de M. Newton, on ne la doit considerer que par raport au centre.

Je suppose que le corps qu'on conçoit se mouvoir sur la circonference d'un cercle, se meut uniformément ; ou, ce qui est la même chose, qu'il parcourt des espaces proportionnels aux tems.

Ceci supposé, je démontre ainsi la Proposition.

DE'MONSTRATION.

Puisque la Force Centripete tend à chaque instant vers le centre du cercle, il est clair qu'elle est exprimée à chaque instant par les excés des secantes FB & HI &c. Mais FB est $= \frac{AF^2}{AC}$ par le Lemme précédent ; donc la Force Centripete sera dans tous les points du cercle comme les quarrés des arcs infiniment petits AF, FH, &c. divisés par le rayon AC.

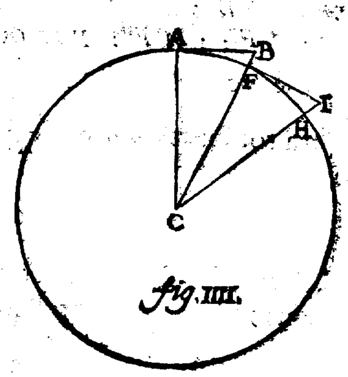

fig. IIII.

Mais parcequ'on a supposé le mouvement uniforme, ces petits arcs égaux sont décrits en tems égaux ; donc par la premiere Consequence de la Définition, ils seront comme les vitesses ; donc par la seconde Consequence, ils peuvent exprimer ces vitesses ; donc la Force Centripete ou Centrifuge est dans tous les points du cercle comme le quarré de la vitesse divisé par le rayon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DÉMONSTRATION.

Il est aisé de démontrer la même chose de la Proposition générale. Car FB ou HI par cette Proposition est toûjours comme $f\,dt^2$; mais par le Lemme précédent FB est comme $\frac{AF^2}{AC}$; donc $\frac{AF^2}{AC}$ sera comme $f\,dt^2$; donc en général dans toute sorte de cercle (f) sera comme $\frac{AF^2}{AC \times dt^2}$, soit que les tems soient égaux ou inégaux. Mais en supposant le mouvement uniforme $\frac{AF^2}{dt^2}$ sera $= vv$; donc on aura comme dans la Proposition précédente $\frac{vv}{AC} = \frac{AF}{AC} = f$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PREMIER COROLLAIRE.

Il est évident que la Force Centripete ou Centrifuge dans un cercle quelconque est par tout la même, puisque $\frac{AF^2}{AC} = \frac{FH_2}{AC}$. En un mot puisque les petits excés des secantes FB & HI &c. sont égaux.

SECOND COROLLAIRE.

Donc dans deux cercles differens les Forces Centripetes seront entr'elles comme les quarrés des arcs parcourus en même tems, ou comme les quarrés des vitesses divisés chacun par le rayon de leur cercle ; ou, ce qui est la même chose, en raison réciproque des rayons ou des circonferences.

Ce Corollaire est la même chose que le Theorême 4. de la Section 2. du premier Livre *de Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis* de M. Newton.

TROISIÉME COROLLAIRE.

Donc si les Forces Centripetes dans deux cercles differens sont supposées égales, le rayon de l'un des cercles sera au rayon de l'autre, comme le quarré de la vitesse dans le premier est au quarré de la vitesse dans le second; & c'est-là le principe fondamental du nouveau Systême des Planetes.

Quoique ces deux Corollaires soient évidens par la Proposition que j'ay démontrée, il ne sera pas inutile de les expliquer par le calcul; ce qui servira à leur donner un nouveau jour.

Soient deux cercles differens, un grand & un petit.

On appellera.

La Force Centripete dans le grand.	*F*.
La même dans le petit.	*f*.
La circonference du grand.	*C*.
La même du petit.	*c*.
Le rayon du grand.	*R*.
Le rayon du petit.	*r*.
La vitesse dans le grand.	*V*.
Dans le petit.	*v*.
Le tems d'une révolution entiere dans le grand.	*T*.
Le même dans le petit.	*t*.

On aura dans le grand $F = \frac{AF^2}{AC} = \frac{V^2}{AC}$, & dans le petit $f = \frac{af^2}{aC} = \frac{v^2}{aC}$. Donc $F : f :: \frac{AF^2}{AC} : \frac{af^2}{aC} :: \frac{V^2}{C} : \frac{v^2}{c} :: cV^2 : Cv^2$. C'est la démonstration du quatriéme Theorême de M. Newton. Donc si $F = f$, on aura $\frac{V^2}{C} = \frac{v^2}{c}$,

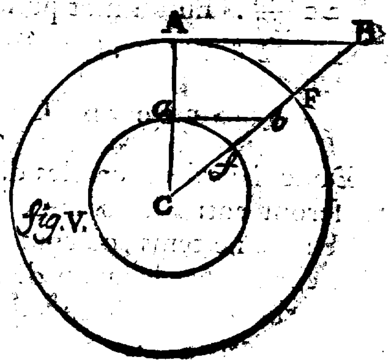

fig. V.

ou $\frac{V^2}{R} = \frac{v^2}{r}$. Donc $C : c :: V^2 : v^2$; & c'est le troisiéme Corollaire que j'ay tiré de ma Proposition, & le principe fondamental du nouveau Systême.

On voit clairement que ce principe se peut tirer assez naturellement du Theorême de M. Newton, & que ce Theorême même n'est qu'une consequence de la Proposition que j'ay démontrée.

Comme l'Auteur du nouveau Systême ne suppose point que F soit $= f$, mais qu'il entreprend de démontrer cette égalité, j'ay cru que je pouvois ici proposer le doute qui m'est venu touchant sa démonstration.

Cet Auteur imagine un fluide homogene, c'est à dire d'une égale résistance par tout. Il suppose que toutes les parties de ce fluide sont en repos ; & prenant deux points à discretion, l'un plus éloigné, & l'autre plus proche du centre, il les fait circuler autour de ce centre. En ce cas il démontre que les Forces Centrifuges sont égales, & voici le Lemme dont il se sert pour le démontrer.

LEMME page 14. * *Du nouveau Systême des Planetes par M. Villemot.*

Les Forces Centrifuges de plusieurs mobiles, qui dans un fluide homogene font des circulations premieres chacun avec differens degrés de vitesse, sont toutes égales entr'elles. Cela est évident, dit l'Auteur, *puisqu'elles sont toutes égales à la résistance du fluide, laquelle est par tout la même dans un fluide homogene.* Ce sont ses propres termes.

Voici ma difficulté.

Ces corps en circulant cherchent à s'échaper par les tangentes de leurs cercles ; donc le fluide ne résiste à ces corps que suivant la direction de ces tangentes : mais la résistance en ce sens ne contribuë en rien à la Force Centripete, de quelque densité que l'on suppose le fluide ; donc l'homogeneité du fluide ne contribuë en rien pour approcher ou pour écarter ces corps du centre.

QUATRIE'ME COROLLAIRE.

Nous avons pris pour tems des révolutions entieres T

dans le grand cercle, & (t) dans le petit: mais le tems est toujours comme l'espace divisé par la vitesse; donc on aura $T = \frac{C}{V}$ dans le grand cercle, & $t = \frac{c}{v}$ dans le petit; donc aussi $V = \frac{C}{T}$ dans le grand, & $v = \frac{c}{t}$ dans le petit: mais (par le second Corollaire) $F : f :: \frac{VV}{C} : \frac{vv}{c}$; donc en mettant $\frac{CC}{TT}$ pour V^2, & $\frac{cc}{tt}$ pour v^2, on aura $F : f :: \frac{C}{TT} : \frac{c}{tt} :: ctt : CTT$; c'est à dire que les Forces Centripetes sont encore entr'elles en raison directe des circonferences, & en raison réciproque des quarrés des tems des révolutions entieres.

CINQUIE'ME COROLLAIRE.

Donc si les révolutions entieres se font en tems égaux, c'est à dire, si $T = t$, on aura $F : f :: C : c :: R : r :: V : v$. Car $\frac{C}{V}$ sera $= \frac{c}{v}$, c'est à dire, qu'en ce cas les Forces Centripetes sont entr'elles en raison directe des rayons ou des vitesses.

SIXIE'ME COROLLAIRE.

Si les quarrés des tems des révolutions entieres sont en raison directe des rayons ou des circonferences, les Forces Centripetes seront égales.

Si $T^2 : t^2 : R : r :: C : c$; donc $T^2 c = t^2 C$; donc (par le quatriéme Corollaire) puisque $F : f :: t^2 C : T^2 c$, F sera $= f$; donc dans le cas du principe fondamental du nouveau Systême, les quarrés des tems periodiques sont entr'eux comme les circonferences ou comme les rayons.

SEPTIE'ME COROLLAIRE.

Si $T : t :: R : r$, on aura (par le quatriéme Corollaire) $F : f :: \frac{1}{R} : \frac{1}{r} :: r : R$, c'est à dire, que les Forces Centripetes seront entr'elles en raison réciproque des distances: mais (par le second Corollaire) $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$; donc

$\frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: r : R$; donc en multipliant les extrêmes & les moïens $V^2 = v^2$; donc $V = v$, c'eſt à dire, qu'en ce cas les viteſſes des corps feront égales.

HUITIE'ME COROLLAIRE.

Si $T^2 : t^2 :: R^3 : r^3$, on aura $F : f :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Car (par le quatriéme Corollaire) $F : f :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ou $\frac{R}{R^3} : \frac{r}{r^3}$; donc $F : f :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} :: r^2 : R^2$, c'eſt à dire que les Forces Centripetes feront en raiſon réciproque des quarrés des diſtances. Mais (par le ſecond Corollaire) $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$; donc en ce cas $\frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: r^2 : R^2$; donc en multipliant les extrêmes & les moïens, on aura $V^2 R = v^2 r$; donc $V^2 : v^2 :: r : R$, c'eſt à dire les quarrés des viteſſes en raiſon réciproque des diſtances ou des rayons ; donc $V : v :: \sqrt{r} : \sqrt{R}$, c'eſt à dire les viteſſes en raiſon réciproque des racines des rayons ou des diſtances.

NEUVIE'ME COROLLAIRE.

Donc ſi par hypothêſe ou autrement l'on ſçait que les viteſſes des Planetes ſont en raiſon réciproque des racines de leurs diſtances au centre, on démontrera que leurs tems periodiques feront entr'eux comme les cubes des diſtances ou des rayons. Car ſi $V : v :: \sqrt{r} : \sqrt{R}$, on aura $V^2 : v^2 :: r : R$; donc $V^6 : v^6 :: r^3 : R^3 :: t^2 :: T^2$, ce qui donneroit en ce cas-là la ſolution du Problême de Kepler.

Les Corollaires 4, 5, 6, 7, 8, ſont de M. Newton : mais outre que j'y joints la démonſtration qui ne s'y trouve point, j'ay été bien aiſe de faire voir qu'ils renferment la démonſtration du Problême de Kepler.

J'eſpere joindre à ce Mémoire bien des choſes qui m'ont paru pouvoir être de quelque utilité par raport à l'Aſtronomie.