

REALISATION

Mesure de G avec la balance de Cavendish

Paturel G., Observatoire de Lyon

Résumé : Dans le précédent Cahier Clairaut (CC104) nous avons décrit la construction d'une balance de Cavendish. Historiquement conçue pour déterminer la densité moyenne de la Terre, la balance de Cavendish est désormais utilisée pour mesurer la constante G de la gravitation universelle. Dans le présent article nous montrons comment déduire cette constante. Compte tenu de la difficulté extraordinaire de cette expérience et des caractéristiques de notre balance nous ne pourrions pas utiliser la méthode traditionnelle. Une autre méthode est expliquée qui donne un résultat acceptable.

Mots-clefs : REALISATION - GRAVITATION - MESURE

Introduction

Nous donnons à nouveau la photo de notre balance (figure1). Le ruban de suspension du fléau passe dans le tube vertical. Les extrémités du fléau supportent chacune une petite sphère en plomb de 2,5 cm de diamètre. Sous le fléau, un petit miroir réfléchit un rayon laser (éteint sur la photo). Ce système, dit de Poggendorf, permet de mesurer la rotation de l'équipage par la mesure du déplacement du spot réfléchi. Les grosses sphères attractives en plomb de 7 cm, de diamètre, sont montées sur des rails en bois, complètement indépendants du boîtier de la balance. Quand l'équilibre est modifié par le déplacement des grosses sphères, le spot lumineux du faisceau laser se déplace et permet de suivre la rotation de la balance, donc le déplacement des petites sphères, avec une extrême précision.

Avant l'assemblage de la balance, nous avons déterminé avec autant de précision que possible les caractéristiques des éléments: masse des sphères et longueur du fléau. Une fois en position, nous avons déterminé les autres caractéristiques que nous récapitulons.

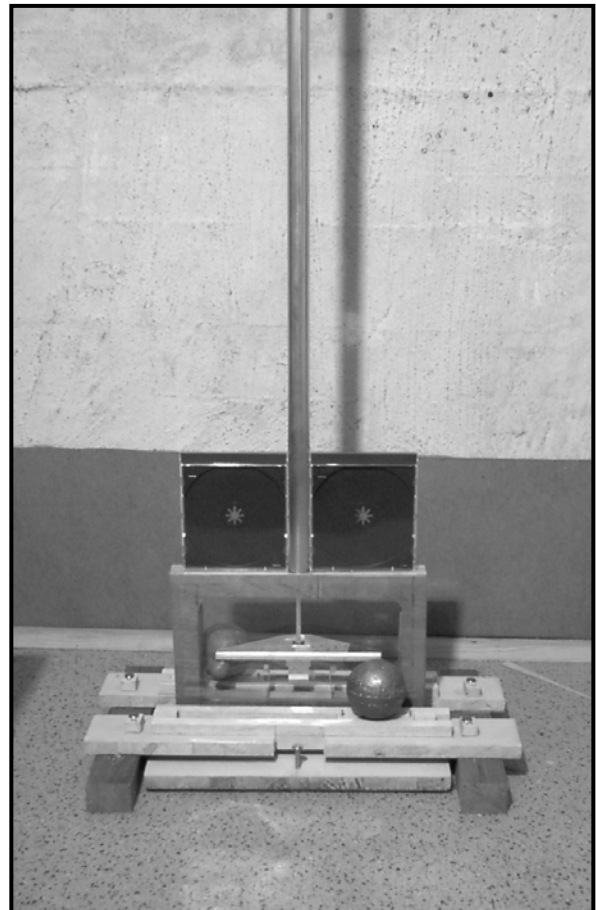


Figure 1: La balance de Cavendish terminée

Les caractéristiques

La pesée des sphères se fait avec une petite balance de cuisine. Les petites sphères de $2,5\text{ cm}$ de diamètre pèsent $m = 93\text{ g}$ chacune. Les grosses sphères de 7 cm de diamètre pèsent $M_1 = 2080\text{ g}$ et $M_2 = 2010\text{ g}$, respectivement. Nous adopterons pour les deux une valeur moyenne $M = 2045\text{ g}$. La longueur du fléau, ou plus exactement, la distance entre les centres des petites sphères collées sous le fléau est de $2.b = 19\text{ cm}$.

La première caractéristique à mesurer est la période d'oscillation, T , de la balance. En effet, la sensibilité de la balance augmente comme le carré de la période. Dans la méthode traditionnelle, la période permet indirectement de déterminer les caractéristiques mécaniques, C , du ruban de suspension. Une mesure patiente du temps que met le spot lumineux pour faire un grand nombre d'aller et retour fournit la période avec une bonne précision. J'ai trouvé: $T = 148,3\text{ s}$. Quand j'ai obtenu cette valeur, j'ai compris que l'attraction universelle serait visible. C'était en effet approximativement la période de la balance de Boys.

J'ai déterminé ensuite la distance minimale, d , entre les centres d'une grosse sphère et d'une petite. Pour cela, j'ai simplement mesuré la distance D entre les rails supportant les grosses sphères. La figure 2 montre que l'on peut déduire très facilement $d = D/2$. J'ai mesuré $D = 11,5\text{ cm}$. La valeur est donc $d = 5.75\text{ cm}$. Cette distance varie au cours de la mesure, mais cette variation est négligeable compte tenu de la précision espérée.

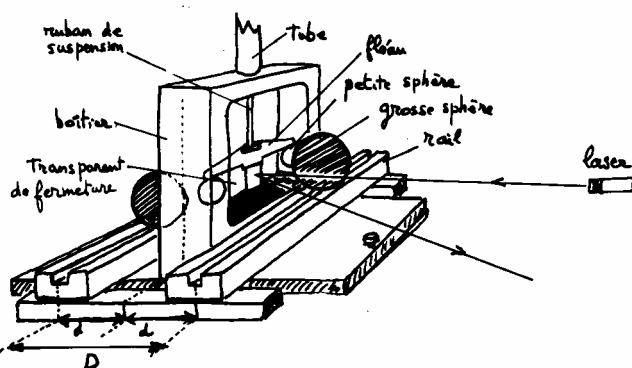


Figure 2 : Schéma montrant comment déterminer la distance entre le centre d'une grosse sphère et celui d'une petite sphère $d = D/2$.

La distance L , entre le centre du miroir et l'écran de projection, a été soigneusement mesurée avec un mètre à ruban. Le résultat obtenu est: $L = 4910\text{ mm}$. Plus cette distance est grande, plus précise sera la mesure de la rotation du fléau. On peut calculer qu'une rotation d'un degré donnerait à cette distance un déplacement du spot lumineux de 17 cm , car il ne faut pas oublier que par réflexion sur le miroir le faisceau tourne d'un angle double.

Nous négligeons la masse du petit miroir et celle du fléau. Ces masses interviennent normalement dans l'expression du moment d'inertie de la balance. En les négligeant, l'expression du moment d'inertie se simplifie et sa mesure explicite n'est pas nécessaire. Il entre implicitement dans l'expression de la période que l'on a mesurée.

Première mesure

En procédant comme je l'avais décrit à la fin du dernier article, on peut mesurer le déplacement du spot lumineux. Il faut être très patient. On laisse la balance se stabiliser, une nuit au moins. On note la position du spot. On déplace les grosses sphères. On laisse stabiliser à nouveau pendant plusieurs heures. On note la nouvelle position du spot. En opérant ainsi, le déplacement mesuré était de l'ordre de $\Delta y = 18\text{ mm}$. Faisons le calcul de la constante de la gravitation G ("big dji" en anglais):

Soit α l'angle total de rotation, pour les positions extrêmes des grosses sphères. Le couple de rappel est $C\alpha$, où C est une constante caractérisant le ruban de suspension. Appelons f la force d'attraction entre une grosse sphère et une petite. Le couple de cette force par rapport à l'axe de rotation du fléau est $f.b$. Comme il y a deux paires de sphères agissant dans un sens puis dans un sens opposé, le couple total est $4f.b$. La force f s'exprime par la loi de gravitation universelle:

$$f = GMm/d^2.$$

Ecrivons qu'il y a équilibre des couples quand la balance est stabilisée:

$$C\alpha = 4.G.M.m.b/d^2 \quad (1).$$

D'autre part, la période d'oscillation de la balance de torsion s'exprime par la relation:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}},$$

où J est le moment d'inertie du fléau. Nous l'écrivons simplement, en vertu des simplifications vues plus haut: $J=2mb^2$.

Ainsi, la constante mécanique caractérisant le ruban s'exprime par:

$$C=8\pi^2mb^2/T^2.$$

En reportant cette expression dans la relation (1), il vient finalement:

$$G = \frac{2\pi^2\alpha.b.d^2}{M.T^2} \quad (2).$$

Faisons de suite l'application numérique. L'angle α en radian s'exprime simplement par:

$$\alpha=\Delta y/(2L),$$

le facteur 2 prend en compte le fait que le faisceau dévie d'un angle double de celui du fléau, à cause de la réflexion sur le miroir.

Avec les valeurs mesurées, nous obtenons $\alpha=0.00184$ rd (c'est à dire $0,10^\circ$). En reportant cette valeur ainsi que les autres valeurs numériques dans l'expression (2), on aboutit à la valeur un peu décevante $G = 25 \cdot 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2$ (la valeur admise est $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2$).

Analyse des erreurs

En analysant bien les mesures, j'ai acquis la conviction que la seule source d'erreur possible provenait du ruban de suspension qui doit présenter de l'hystérésis. Quand le ruban est tordu sous l'effet de la rotation de la balance, il garde la mémoire de cette torsion. Bref, le ruban de suspension en aluminium manque de ressort. Une première façon d'éviter cet effet est de déplacer les grosses sphères très lentement, pour parvenir au second point d'équilibre, de manière asymptotique, sans jamais le dépasser. En répétant l'expérience, je n'ai pas, malgré toute ma patience, pu éviter les oscillations, mais l'amplitude a été sérieusement diminuée. La valeur de Δy a été réduite ainsi d'un facteur deux, et la valeur de G a été réduite d'autant, soit:

$$G=12,5 \cdot 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2.$$

On peut imaginer qu'en permutant les grosses sphères avec une infinie lenteur, on arriverait à une valeur de G plus acceptable. J'ai modifié la balance en remplaçant le ruban de suspension en aluminium par un morceau de bande magnétique d'une cassette "audio". Le résultat a été sensiblement meilleur. Cela montre que l'on peut éviter la difficile réalisation du ruban d'aluminium.

Au lieu de continuer dans cette voie classique, j'ai imaginé une méthode très différente, que je vous livre maintenant.

Méthode dynamique

Au tout début de l'attraction, quand on vient juste de faire glisser une grosse sphère en face d'une petite, le ruban n'offre pas de résistance à la torsion. La petite sphère "tombe" librement sur la grosse. Si nous parvenions à mesurer l'accélération de cette "chute", nous pourrions en déduire G . L'accélération s'écrit :

$$a = \frac{GM}{d^2} \quad (3).$$

Comment mesurer a ? Il faut enregistrer simultanément le déplacement (de la petite sphère, donc du spot) et le temps. Pour parvenir à cela, j'ai collé une montre digitale sur le papier millimétré où se formait le spot lumineux. La montre est mise en mode chronomètre. On attend le repos parfait du spot et on démarre le chronomètre au moment précis où les grosses sphères sont déplacées. J'ai réalisé une série de photos du spot et de la montre, comme illustré à la Figure 3.



Figure 3 : Les photos successives montrant le spot et le chronomètre. On peut mesurer ainsi l'accélération produite par une sphère attractive.

J'ai mesuré le déplacement y par rapport à une origine arbitraire. Le temps est noté au dixième de seconde. On trouve, à partir des cinq premières photos, le temps t et la position y du spot (cf. tableau 1):

temps t (s)	y (mm)	x (mm)	$(x-x_0)$ (mm)	$(t-t_0)^2$ (s ²)
10,8	3,00	0,029	0	0
25,2	3,5	0,034	0,005	204
37,3	5,5	0,053	0,024	697
45,3	8,0	0,077	0,048	1183
52,9	11,0	0,107	0,077	1764
64,3	16,5	0,159	0,130	2851

Tableau 1: mesure de temps t et de déplacement du spot y pour déduire l'accélération (voir texte).

Le déplacement y du spot est converti en déplacement x des petites sphères par la relation géométrique. Comme précédemment le facteur 2 prend en compte le fait que la réflexion du faisceau lumineux donne une déviation double:

$$x = \frac{1}{2} \frac{b}{L} y$$

L'accélération est normalement donnée par la relation classique de la dynamique:

$$(x - x_0) = \frac{1}{2} a' (t - t_0)^2.$$

Mais attention, comme les grosses sphères agissent dans un sens puis dans l'autre, ce que nous déterminons est le double de l'accélération cherchée $a = a'/2$. En revanche, le fait qu'il y ait deux petites sphères ne change rien, car chacune acquiert la même accélération.

Les quantités nécessaires sont données dans le Tableau 1. La représentation graphique (Figure 4) de $a = a'/2$ montre que l'accélération est à peu près constante pendant les premières secondes.

On déduit de ces mesures que l'accélération est $a = 130 \times 10^{-6} / 3000 \text{ m.s}^{-2}$, soit:

$$a = 4,33 \times 10^{-8} \text{ m.s}^{-2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à déduire $G = a \cdot d^2 / M$. Avec $d = 0,0575 \text{ m}$ et $M = 2,045 \text{ kg}$ on aboutit à la valeur:

$$G = 7,0 \times 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2} \cdot \text{m}^2,$$

au lieu de $6,67 \times 10^{-11} \text{ N.kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$.

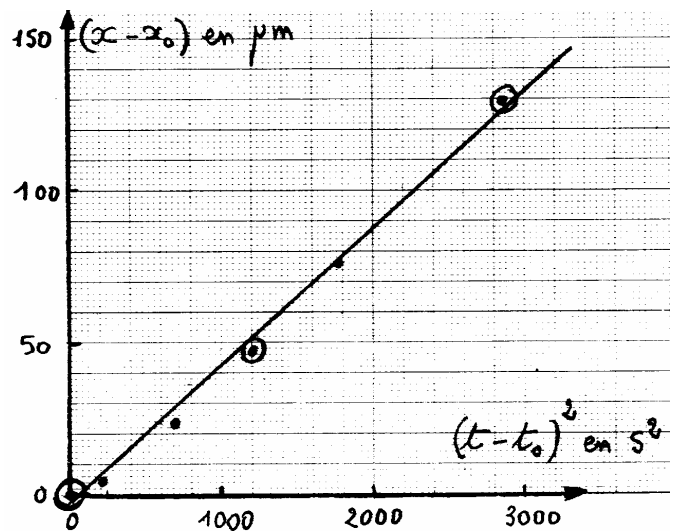


Figure 4. Représentation graphique de la quantité $a'/2 = (x-x_0)/(t-t_0)^2$. Les points encerclés correspondent aux mesures données par les trois photos de la Figure 3.

Conclusion

Si la fabrication de la balance n'est pas trop difficile, en revanche, la réalisation de l'expérience elle-même est d'une extrême difficulté, car il faut la faire dans un local parfaitement calme. Qualitativement, le fonctionnement est très spectaculaire. Quantitativement, c'est un peu plus décevant par la méthode classique, mais la méthode dynamique donne un résultat assez satisfaisant.

■