MÉMOIRE
SUR
LE PASSAGE DE VÉNUS
DU 3 JUIN 1769. (*)

PAR M. DE LA GRANGE.

Personne n'ignore les grands avantages que l'Astronomie peut retirer des observations des passages de Vénus sur le disque du Soleil. Non seulement elles servent à rectifier les principaux élémens de la théorie de cette Planete; elles sont encore très utiles pour déterminer la parallaxe du Soleil, qui est, comme l'on sait, un des points fondamentaux de la physique céleste. Le passage qui a été observé en 1761, a déjà beaucoup diminué l'incertitude où l'on étoit sur la vraie quantité de cette parallaxe; mais c'est à celui que nous attendons, & qui sera le dernier qu'on puisse voir dans ce siecle, à la fixer d'une maniere bien certaine & irrévocable. Cette considération m'a engagé à discuter dans ce Mémoire les moyens que l'observation de ce phénomene peut fournir de décider un point si important. On y verra 1°. Comment on peut calculer l'effet que les parallaxes combinées de deux astres quelconques doivent produire sur la distance de ces deux astres. 2°. On y trouvera une méthode très simple & très commode pour déterminer en général, dans les passages des Planetes sur le Soleil, les parallaxes d'entrée, de sortie & de durée pour tous les pays de la terre. 3°. Une méthode pour déduire la parallaxe du Soleil de trois observations d'un même passage faites dans trois endroits différens, indépendamment de la

(*) Lu à l'Académie le 12. Novembre 1767.

la connoissance du mouvement de la Planete. 4°. Enfin on y trouvera l'application de notre théorie au passage de Vénus qui doit arriver le 3. Juin 1769. au soir, avec quelques remarques rélatives au choix des lieux, où il pourra être observé avec le plus de fruit.

§. I. *De la parallaxe de distance des astres en général.*

Planch. XVI. Fig. 1.

1. Soit T le centre de la terre, TAC le plan de l'équateur, TA une ligne qui passe par le premier méridien pris à volonté, S un astre quelconque, SC une perpendiculaire au plan de l'équateur, CB une perpendiculaire à la ligne TA, TS une ligne qui joigne les points T & S, & TC une autre ligne qui passe par les points T & C; soient nommées ensuite

TB - - - - - - - l,
BC - - - - - - - - m,
CS - - - - - - - - n,

la distance TS de l'astre S au centre de la terre - - - r,
l'angle STC qui exprime la déclinaison de l'astre S - - - p,
l'angle CTA qui représente la distance du même astre au premier méridien de la terre - - - - q;

(cette distance n'est autre chose que l'angle horaire de l'astre par rapport au méridien donné).

Il est clair 1°. que les trois quantités l, m, n, pourront être regardées comme les coordonnées orthogonales, qui déterminent la position du point S rélativement au point T; 2°. qu'on aura

$$l = r \cos p \cos q, \quad m = r \cos p \sin q, \quad n = r \sin p.$$

Fig. 2.

2. Soit maintenant L un point quelconque de la surface de la terre, LM une perpendiculaire au plan de l'équateur TAM, & MN une perpendiculaire à la ligne TA; & soient nommées

TN . . . . λ,
NM . . . . μ,
ML . . . . ν,

Le rayon TL de la terre . . . . ρ,
L'angle LTM, c'eſt à dire la latitude terreſtre du lieu L . . ψ,
L'angle MTN, c'eſt à dire la longitude du même lieu . . . ϕ.

Les quantités λ, μ, ν, feront les coordonnées rectangles du point L par rapport au point T, & l'on aura, comme ci-deſſus,

$$\lambda = \rho \cos\psi \cos\phi,\ \mu = \rho \cos\psi \sin\phi,\ \nu = \rho \sin\psi.$$

3. Ayant déterminé ainſi la poſition des points S & L par rapport au point T, il eſt facile de déterminer la poſition reſpective des points S & L.

En effet, ſi on dénote par l', m', n', les coordonnées rectangles du point S par rapport au point L, il eſt viſible qu'on aura

$$l' = l - \lambda,\ m' = m - \mu,\ n' = n - \nu;$$

& ſi on fait, comme ci-deſſus,

$$l' = r' \cos p' \cos q',\ m' = r' \cos p' \sin q',\ n' = r' \sin p',$$

on verra aiſément que r' ſera la diſtance de l'aſtre S au lieu L de la terre, que p' exprimera la déclinaiſon apparente de cet aſtre vue du lieu L de la terre, & que q' exprimera ſa diſtance apparente du même aſtre au premier méridien de la terre par rapport au même point L.

4. Donc, pour déterminer le lieu apparent de l'aſtre par ſon lieu vrai, on aura les trois équations ſuivantes,

$$r' \cos p' \cos q' = r \cos p \cos q - \rho \cos\psi \cos\phi,$$
$$r' \cos p' \sin q' = r \cos p \sin q - \rho \cos\psi \sin\phi,$$
$$r' \sin p' = r \sin p - \rho \sin\psi,$$

d'où l'on tire

$$\sin p' = \frac{r \sin p - \rho \sin\psi}{\sqrt{(r^2 - 2r\rho(\cos\psi \cos p \cos(q-\phi) + \sin\psi \sin p) + \rho^2)}},$$

 ſin

$$\sin q' = \frac{r \cos p \sin q - \rho \cos\psi \sin\phi}{\sqrt{(r^2 \cos p^2 - 2r\rho \cos\psi \cos p \cos(q-\phi) + \rho^2 \cos\psi^2)}},$$

ou bien, en faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{\rho}{r}$ (c'eſt à dire la parallaxe horizontale de l'aſtre S) $= i$, & diviſant le haut & le bas de la ſeconde fraction par $\cos p$,

$$\sin p' = \frac{\sin p - i \sin\psi}{\sqrt{(1 - 2i(\cos\psi \cos p \cos(q-\phi) + \sin\psi \sin p) + i^2)}},$$

$$\sin q' = \frac{\sin q - \frac{i \cos\psi \sin\phi}{\cos p}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2i \cos\psi \cos(q-\phi)}{\cos p} + \frac{i^2 \cos\psi^2}{\cos p^2}\right)}}$$

5. Conſidérons maintenant un autre aſtre quelconque V, dont

la diſtance au centre de la terre ſoit . . . . . R,
la diſtance au premier méridien terreſtre . . . . Q,
la déclinaiſon . . . . P,

& ſuppoſons que, par rapport au lieu L de la terre,

la diſtance apparente de l'aſtre V au premier méridien ſoit . . Q',
la déclinaiſon apparente . . . . . P';

on aura, en nommant I la parallaxe horizontale de cet aſtre, en ſorte que $I = \frac{\rho}{R}$,

$$\sin P' = \frac{\sin P - I \sin\psi}{\sqrt{(1 - 2I(\cos\psi \cos P \cos(Q-\phi) + \sin\psi \sin P) + I^2)}},$$

$$\sin Q' = \frac{\sin Q - \frac{I \cos\psi \sin\phi}{\cos P}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2I \cos\psi \cos(Q-\phi)}{\cos P} + \frac{I^2 \cos\psi^2}{\cos P^2}\right)}}.$$

6. Or

6. Or, ſoit P le pole de l'équateur (fig. 3.), PS le cercle de déclinaiſon de l'aſtre S, PV le cercle de déclinaiſon de l'aſtre V, & VS un arc de grand cercle qui paſſe par ces deux aſtres, on aura dans la triangle PVS, $PS = 90^\circ - p$, $PV = 90^\circ - P$, $SPV = Q - q$; donc nommant Fig. 3.

la diſtance SV de l'aſtre V à l'aſtre S . . . . . Z,

on aura

$$\text{coſ}\, Z = \text{coſ}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{coſ}\,(Q - q) + \text{ſin}\, p \,\text{ſin}\, P.$$

De même, ſi on appelle la diſtance apparente de l'aſtre V à l'aſtre S, par rapport au point L de la terre . . . Z',

on aura

$$\text{coſ}\, Z' = \text{coſ}\, p' \,\text{coſ}\, P' \,\text{coſ}\,(Q' - q') + \text{ſin}\, p' \,\text{ſin}\, P'.$$

Ainſi on trouvera les valeurs de Z & de Z', dont la différence ſera l'effet des parallaxes combinées des deux aſtres V & S.

§. II. *Simplification des formules précédentes en ſuppoſant les parallaxes des aſtres fort petites, & conſéquences qui réſultent de ces formules.*

7. Suppoſons que les quantités i & I ſoient très petites, (ce qui eſt vrai en général à l'égard de tous les aſtres,) & nous aurons, en négligeant les termes très petits du ſecond ordre & des ordres ultérieurs,

$$\text{ſin}\, p' = \text{ſin}\, p + i\,(\text{coſ}\,\psi \,\text{ſin}\, p \,\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\,(q - \Phi) - \text{ſin}\,\psi \,\text{coſ}\, p^2),$$

$$\text{ſin}\, q' = \text{ſin}\, q + \frac{i \,\text{coſ}\,\psi}{\text{coſ}\, p}\,(\text{ſin}\, q \,\text{coſ}\,(q - \Phi) - \text{ſin}\,\Phi).$$

Donc, ſi on fait

$$p' = p + ix, \quad \& \; q' = q + iy,$$

ce qui donne $\text{ſin}\, p' = \text{ſin}\, p + ix \,\text{coſ}\, p$, & $\text{ſin}\, q' = \text{ſin}\, q + iy \,\text{coſ}\, q$, on aura

$$x = \text{coſ}\,\psi \,\text{ſin}\, p \,\text{coſ}\,(q - \Phi) - \text{ſin}\,\psi \,\text{coſ}\, p,$$

$$y = \frac{\text{coſ}\,\psi}{\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\, q}\,(\text{ſin}\, q \,\text{coſ}\,(q - \Phi) - \text{ſin}\,\Phi),$$

ou bien

$$y = \frac{\text{coſ}\,\psi \,\text{ſin}\,(q - \Phi)}{\text{coſ}\, p};$$

& il eſt clair que les quantités ix & iy repréſenteront les parallaxes de déclinaiſon & d'aſcenſion droite de l'aſtre S.

8. Si on fait de même

$$P' = P + IX, \quad Q' = Q + IY,$$

en ſorte que IX & IY ſoient les parallaxes de déclinaiſon & d'aſcenſion droite de l'aſtre V, on aura

$$X = \text{coſ}\,\psi \,\text{ſin}\, P \,\text{coſ}\,(Q - \Phi) - \text{ſin}\,\psi \,\text{coſ}\, P,$$

$$Y = \frac{\text{coſ}\,\psi \,\text{ſin}\,(Q - \Phi)}{\text{coſ}\, P},$$

& la valeur de coſ Z' deviendra

$$\begin{aligned} \text{coſ}\, Z' = {} & \text{coſ}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{coſ}\,(Q - q) + \text{ſin}\, p \,\text{ſin}\, P \\ & + ix\,(\text{coſ}\, p \,\text{ſin}\, P - \text{ſin}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{coſ}\,(Q - q)) \\ & + IX\,(\text{coſ}\, P \,\text{ſin}\, p - \text{ſin}\, P \,\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\,(Q - q)) \\ & + (iy - IY)\,\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{ſin}\,(Q - q), \end{aligned}$$

où l'on remarquera que $\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{coſ}\,(Q - q) + \text{ſin}\, p \,\text{ſin}\, P = \text{coſ}\, Z$.

9. Si on ſubſtitue maintenant à la place de x, y, X & Y leurs valeurs, & qu'on faſſe $I = ik$, c'eſt à dire $k = \frac{r}{R}$, &

$$\begin{aligned} L = {} & (\text{coſ}\, p \,\text{ſin}\, P - \text{ſin}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{coſ}\,(Q - q))\,\text{ſin}\, p \,\text{coſ}\, q + \text{coſ}\, P \,\text{ſin}\,(Q - q)\,\text{ſ}\, q \\ & + k((\text{coſ}\, P \,\text{ſin}\, p - \text{ſin}\, P \,\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\,(Q - q))\,\text{ſ}\, P \,\text{coſ}\, Q - \text{coſ}\, p \,\text{ſ}\,(Q - q)\,\text{ſ}\, Q), \\ M = {} & (\text{coſ}\, p \,\text{ſin}\, P - \text{ſin}\, p \,\text{coſ}\, P \,\text{coſ}\,(Q - q))\,\text{ſin}\, p \,\text{ſ}\, q - \text{coſ}\, P \,\text{ſ}\,(Q - q)\,\text{coſ}\, q \\ & + k((\text{coſ}\, P \,\text{ſin}\, p - \text{ſin}\, P \,\text{coſ}\, p \,\text{coſ}\,(Q - q))\,\text{ſ}\, P \,\text{ſ}\, Q + \text{coſ}\, p \,\text{ſ}\,(Q - q)\,\text{coſ}\, Q), \end{aligned}$$

$$N = -(\cos p \sin P - \sin p \cos P \cos(Q-q)) \cos p$$
$$- k(\cos P \sin p - \sin P \cos p \cos(Q-q)) \cos P,$$

on aura la formule suivante,

$$\cos Z' = \cos Z + i(L \cos\psi \cos\phi + M \cos\psi \sin\phi + N \sin\psi),$$

dans laquelle les quantités L, M, & N ne dépendent que de la situation des astres, en sorte qu'elles sont les mêmes pour tous les lieux de la terre.

10. J'observe présentement que la quantité $L \cos\psi \cos\phi + M \cos\psi \sin\phi + N \sin\psi$, peut se ramener à cette forme,

$$\gamma(\cos\psi \cos\alpha \cos(\phi - \beta) + \sin\psi \sin\alpha);$$

car, en mettant $\cos\beta \cos\phi + \sin\beta \sin\phi$ à la place de $\cos(\phi - \beta)$, & comparant les termes, on aura

$$\gamma \cos\alpha \cos\beta = L,\ \gamma \cos\alpha \sin\beta = M,\ \gamma \sin\alpha = N,$$

par où il est aisé de déterminer les quantités α, β & γ.

Fig. 4.

Or, si par le pole P du globe terrestre & par le lieu L, dont la latitude est ψ & la longitude ϕ, on décrit un triangle sphérique PLH tel, que la latitude du point H soit α & la longitude β, en sorte que l'on ait $PL = 90° - \psi$, $PH = 90° - \alpha$, & $HPL = \phi - \beta$, il est clair, qu'en nommant ζ le côté LH, c'est à dire la distance entre les lieux L & H, on aura

$$\cos\zeta = \cos\alpha \cos\psi \cos(\phi - \beta) + \sin\alpha \sin\psi,$$

& par conséquent

$$\gamma \cos\zeta = L \cos\psi \cos\phi + M \cos\psi \sin\phi + N \sin\psi; \text{ donc}$$
$$\cos Z' = \cos Z + i\gamma \cos\zeta.$$

11. De là on voit que, si du point H comme pole on décrit un cercle quelconque sur le globe terrestre, tous les lieux qui se trouveront sous la circonférence de ce cercle, verront la même distance apparente des deux astres, & par conséquent seront sujets à la même parallaxe de distance.

Ainsi

Ainsi nous appellerons dans la suite *cercles de parallaxe* ces cercles décrits sur le globe, & qui passent par tous les points où la parallaxe de distance est la même; & nous nommerons de même *pole de parallaxe* le pole H de tous ces cercles, dont nous allons maintenant chercher la position.

12. Les trois équations de l'art. 10. se réduisent aisément à celles-ci:

$$\gamma \cos\alpha \cos(\beta - q) = L \cos q + M \sin q,$$
$$\gamma \cos\alpha \sin(\beta - q) = M \cos q - N \sin q,$$
$$\gamma \sin\alpha = N,$$

lesquelles par la substitution de L, M, & N, se changent en

$$\gamma \cos\alpha \cos(\beta - q) = (\cos p \sin P - \sin p \cos P \cos(Q-q)) \sin p +$$
$$k[(\cos P \sin p - \sin P \cos p \cos(Q-q)) \sin P \cos(Q-q) -$$
$$\cos p \sin(Q-q)^2],$$
$$\gamma \cos\alpha \sin(\beta - q) = -\cos P \sin(Q-q) + k[(\cos P \sin p - \sin P$$
$$\cos p \cos(Q-q)) \sin P \sin(Q-q) + \cos p \sin(Q-q) \cos(Q-q)],$$
$$\gamma \sin\alpha = -(\cos p \sin P - \sin p \cos P \cos(Q-q)) \cos p -$$
$$k(\cos P \sin p - \sin P \cos p \cos(Q-q)) \cos P,$$

ou bien, à cause de $\cos Z = \sin p \sin P + \cos p \cos P \cos(Q-q)$, en celles-ci,

$$\gamma \cos\alpha \cos(\beta - q) = \cos p \cos Z - \cos P \cos(Q-q) +$$
$$k(\cos P \cos(Q-q) \cos Z - \cos p),$$
$$\gamma \cos\alpha \sin(\beta - q) = -\cos P \sin(Q-q)(1 - k \cos Z),$$
$$\gamma \sin\alpha = \sin p \cos Z - \sin P + k(\sin P \cos Z - \sin p),$$

d'où il est facile de tirer les valeurs de γ, α, & $\beta - q$.

13. En ajoutant ensemble les quarrés de ces trois équations, on aura d'abord

$$\gamma^2 = \cos Z^2 - 2\cos Z^2 + 1 + 2k(\cos Z^3 + \cos Z - \cos Z - \cos Z) + k^2(\cos Z^2 - 2\cos Z^2 + 1) = \sin Z^2 (1 - 2k\cos Z + k^2),$$

& par conſéquent

$$\gamma = \sin Z \sqrt{(1 - 2k \cos Z + k^2)}.$$

Or $k = \frac{r}{R}$ (art. 9.); donc

$$\sqrt{(1 - 2k\cos Z + k^2)} = \frac{\sqrt{(R^2 - 2Rr\cos Z + r^2)}}{R}.$$

Mais, en conſidérant le triangle rectiligne TVS, dans lequel $TS = r$, $TV = R$, & $VTS = Z$, il eſt clair que $VS = \sqrt{(R^2 - 2Rr\cos Z + r^2)}$; d'où il s'enſuit que, ſi on nomme f la diſtance rectiligne de l'aſtre V à l'aſtre S, on aura Fig. 5.

$$\sqrt{(1 - 2k\cos Z + k^2)} = \frac{f}{R}.$$

Soit donc pour abréger $u = \frac{f}{R}$, & l'on aura $\gamma = u \sin Z$, & par conſéquent

$$\cos Z' = \cos Z + iu \sin Z \cos \zeta.$$

Donc, puiſque i eſt une quantité extrèmement petite, on aura à très peu près

$$\cos Z' = \cos(Z - iu\cos\zeta), \quad \text{d'où}$$

$$Z' = Z - iu\cos\zeta,$$

de ſorte que $-iu\cos\zeta$ ſera la parallaxe de diſtance des deux aſtres pour tous les lieux de la terre L qui ſont éloignés du pole H de l'arc ζ.

14. Suppoſons à préſent que P ſoit le pole de l'équateur, S le lieu vrai de l'aſtre S, V celui de l'aſtre V, & H le *pole des parallaxes*, nous aurons dans le triangle PSV, $PS = 90° - p$, $PV = 90° - P$, $SPV = Q - q$, $SV = Z$, & dans le triangle PSV, $PH = 90° - \alpha$, $SPH = \beta - q$, par conſéquent Fig. 6.

$$\cos SH = \sin p \sin\alpha + \cos p \cos\alpha \cos(\beta - q),$$

& ſubſtituant pour $\sin\alpha$ & $\cos\alpha \cos(\beta - q)$, leurs valeurs tirées des équations de l'art. 12.,

$$\cos SH = \frac{\cos Z - \cos Z + k(\cos Z^2 - 1)}{\gamma}$$

$$= -\frac{k \sin Z^2}{\gamma} = -\frac{k\sin Z}{\sqrt{(1 - 2k\cos Z + k^2)}};$$

c'eſt à dire, en faiſant $\frac{f}{r} = g$, $\cos SH = -\frac{\sin Z}{g}$.

De plus, on aura $\sin PSH = \frac{\sin(\beta - q)\cos\alpha}{\sin SH}$ = (en ſubſtituant la la valeur de $\sin(\beta - q)\cos\alpha$) $\frac{\cos P \sin(Q - q)(k\cos Z - 1)}{\gamma \sin SH}$, ou bien, à cauſe de $\sin PSV = \frac{\sin(Q - q)\cos P}{\sin Z}$, $\sin PSH = \frac{\sin Z(k\cos Z - 1)\sin PSV}{\gamma \sin SH}$; mais $\sin SH = \frac{k\cos Z - 1}{\sqrt{(1 - 2k\cos Z + k^2)}}$; donc $\gamma \sin SH = \sin Z(k\cos Z - 1)$; par conſéquent $\sin PSH = \sin PSV$, & $PSH = PSV$: d'où il s'enſuit que, pour trouver le pole H des parallaxes, il n'y a qu'à prolonger l'arc de grand cercle SV du côté de V, & prendre ſur ce prolongement un arc SH, dont le coſinus ſoit $= -\frac{\sin Z}{g}$; c'eſt à dire, prendre un arc s tel, que $\sin s = \frac{\sin Z}{g}$, & faire enſuite l'arc $SH = 90° + s$. Fig. 7.

15. Si on vouloit déterminer la poſition du pole H ſur le globe par latitude & par longitude, il n'y auroit qu'à chercher d'abord l'angle PSV, c'eſt à dire l'angle que le cercle SV paſſant par les deux aſtres fait avec le cercle de déclinaiſon PS de l'aſtre S. Fig. 7.

Soit cet angle PSV $= \epsilon$, & l'on aura (comme nous l'avons trouvé ci-deſſus)

$$\sin \epsilon = \frac{\sin (Q - q) \cos P}{\sin Z}.$$

Ainſi, dans le triangle PSH, connoiſſant le côté PS $= 90° - p$, le côté SH $= 90° + s$ & l'angle PSH $= \epsilon$, on trouvera le côté PH $= 90° - \alpha$, & l'angle SPH $= \beta - q$; de ſorte qu'on aura

$$\sin \alpha = \cos p \cos s \cos \epsilon - \sin p \sin s, \quad \& \sin (\beta - q) = \frac{\cos s \sin \epsilon}{\cos p}.$$

16. Imaginons maintenant que les aſtres S & V ſoient en mouvement, & qu'au bout d'un tems quelconque ils ſe retrouvent à la même diſtance Z l'un de l'autre; & ſuppoſons que les quantités p, q, ϵ, α, β, u & ζ, deviennent alors p', q', ϵ', α', β', u' & ζ', on aura les mêmes formules qu'auparavant, en marquant ſimplement ces lettres d'un trait.

Ainſi la parallaxe de diſtance ſera pour cette nouvelle poſition des aſtres $- iu' \cos \zeta'$.

17. Si on nomme θ le mouvement horaire de l'aſtre V pour s'approcher de l'aſtre S, lorſque ces deux aſtres ſe trouvent pour la premiere fois à la diſtance Z l'un de l'autre, & θ' le mouvement horaire du même aſtre V pour s'éloigner de l'aſtre S, lorſque ces aſtres ſe trouvent pour la ſeconde fois à la même diſtance; il eſt clair qu'on aura $- \frac{iu}{\theta} \cos \zeta$, & $- \frac{iu}{\theta} \cos \zeta'$ pour les deux parallaxes de diſtance réduites en tems.

De ſorte que ſi t eſt le tems au bout duquel les aſtres V & S ſe trouvent pour la premiere fois à la diſtance Z, & t' celui au bout duquel ils ſe retrouvent à la même diſtance, par rapport au centre de la terre; & que T, & T' ſoient les tems au bout deſquels les mêmes apparences doivent avoir lieu pour un obſervateur placé en L, on aura

$$T = t - \frac{iu}{\theta} \cos \zeta, \quad T' = t' + \frac{iu'}{\theta'} \cos \zeta'.$$

18. De là on pourra trouver le tems qui doit s'écouler entre les deux momens, où les aſtres V & S paroiſſent à la même diſtance Z l'un de l'autre.

Ce tems ſera $= T' - T = t' - t + i \left(\frac{u}{\theta} \cos \zeta + \frac{u'}{\theta'} \cos \zeta'\right)$;

mais $t' - t$ eſt le tems par rapport au centre de la terre; donc l'effet de la parallaxe ſera de

$$i \left(\frac{u}{\theta} \cos \zeta + \frac{u'}{\theta'} \cos \zeta'\right),$$

c'eſt à dire égal à la ſomme des deux parallaxes de diſtance.

Soit pour plus de ſimplicité

$$\frac{u}{\theta} = w, \quad \& \quad \frac{u'}{\theta'} = w',$$

en ſorte que l'effet de la ſomme des parallaxes ſoit exprimé par $i (w \cos \zeta + w' \cos \zeta')$; ſubſtituons à la place de $\cos \zeta$ ſa valeur $\cos \alpha \cos \psi \cos (\phi - \beta) + \sin \alpha \sin \psi$, trouvée (art. 10.), & à la place de $\cos \zeta'$ ſa valeur correſpondante $\cos \alpha' \cos \psi \cos (\psi - \beta') + \sin \alpha' \sin \psi$, & la quantité $w \cos \zeta + w' \cos \zeta'$ deviendra, en ordonnant les termes

$$(w \cos \alpha \cos \beta + w' \cos \alpha' \cos \beta') \cos \psi \cos \phi +$$
$$(w \cos \alpha \sin \beta + w' \cos \alpha' \sin \beta') \cos \psi \sin \phi +$$
$$(w \sin \alpha + w' \sin \alpha') \sin \psi.$$

Donc, ſi on ſuppoſe

$$\Gamma \cos A \cos B = w \cos \alpha \cos \beta + w' \cos \alpha' \cos \beta'$$
$$\Gamma \cos A \sin B = w \cos \alpha \sin \beta + w' \cos \alpha' \sin \beta'$$
$$\Gamma \sin A = w \sin \alpha + w' \sin \alpha',$$

on aura

$$w \cos \zeta + w' \cos \zeta' = \Gamma (\cos A \cos \psi \cos (\phi - B) + \sin A \sin \psi).$$

Or, ſi l'on prend ſur le globe terreſtre un point G, dont la latitude ſoit A & la longitude ſoit B, & qu'on nomme z la diſtance d'un lieu quelconque L de la terre à ce point G, on aura en général

$$\cos z = \cos A \cos \psi \cos (\phi - B) + \sin A \sin \psi;$$

par conſéquent la ſomme des deux parallaxes de diſtance par rapport au lieu L ſera exprimée par $2\Gamma \cos z$, c'eſt à dire, d'une maniere analogue à celle dont nous avons repréſenté chacune des deux parallaxes en particulier.

D'où il ſuit que le point G du globe terreſtre pourra être regardé comme le pole de la ſomme des parallaxes, de maniere qu'en décrivant autour de ce pole un cercle quelconque, la ſomme des parallaxes ſera la même pour tous les pays qui ſe trouveront ſous la circonférence d'un tel circle.

19. Les trois équations de l'art. préc. donnent d'abord

$$\Gamma^2 = w^2 + w'^2 + 2ww' (\cos \alpha \cos \alpha' \cos (\beta' - \beta) + \sin \alpha \sin \alpha').$$

Or, ſi P eſt le pole du globe terreſtre, H le pole des parallaxes pour la premiere ſituation des aſtres, H' le pole des parallaxes pour la ſeconde ſituation, en ſorte que l'on ait $PH = 90° - \alpha$, $PH' = 90° - \alpha'$, $HPH' = \beta' - \beta$; & qu'on nomme ω la diſtance HH' des deux poles, on aura Pl. XVII. Fig. 8.

$$\cos \omega = \cos \alpha \cos \alpha' \cos (\beta - \beta') + \sin \alpha \sin \alpha',$$

& par conſéquent

$$\Gamma = \sqrt{(w^2 + 2ww' \cos \omega + w'^2)}.$$

Les mêmes équations donnent enſuite ces deux-ci,

$$\Gamma (\cos \alpha \cos A \cos (\beta - B) + \sin \alpha \sin A)$$
$$= w + w' (\cos \alpha \cos \alpha' \cos (\beta - \beta') + \sin \alpha \sin \alpha'),$$

$$\Gamma (\cos \alpha' \cos A \cos (\beta' - B) + \sin \alpha' \sin A)$$
$$= w' + w (\cos \alpha \cos \alpha' \cos (\beta - \beta') + \sin \alpha \sin \alpha').$$

Fig. 8. Or, en tirant des poles H, & H' au pole G de la ſomme des parallaxes les arcs de grand cercle HG & H'G, & nommant ces arcs χ & χ', on aura

$$\cos \chi = \cos \alpha \cos A \cos (\beta - B) + \sin \alpha \sin A$$
$$\cos \chi' = \cos \alpha' \cos A \cos (\beta' - B) + \sin \alpha' \sin A.$$

Donc

$$\cos \chi = \frac{w + w' \cos \omega}{\sqrt{(w^2 + 2ww' \cos \omega + w'^2)}}, \quad \&$$

$$\cos \chi' = \frac{w \cos \omega + w'}{\sqrt{(w^2 + 2ww' \cos \omega + w'^2)}}.$$

Ainſi connoiſſant dans le triangle HGH' les trois côtés $HH' = \omega$, $HG = \chi$, & $H'G = \chi'$, on trouvera la poſition du pole G.

Au reſte, ſi on vouloit connoitre les valeurs de A & de B, c'eſt à dire, la latitude & longitude même du pole G, on trouveroit immédiatement par les équations de l'art. préc.

$$\operatorname{tang} B = \frac{w \cos \alpha \sin \beta + w' \cos \alpha' \sin \beta'}{w \cos \alpha \cos \beta + w' \cos \alpha' \cos \beta'},$$

ou bien

$$\operatorname{tang} (B - \beta) = \frac{w' \cos \alpha' \sin (\beta' - \beta)}{w \cos \alpha + w' \cos \alpha' \cos (\beta' - \beta)},$$

$$\& \sin A = \frac{w \sin \alpha + w' \sin \alpha'}{\sqrt{(w^2 + 2ww' \cos \omega + w'^2}}.$$

20. Si l'on avoit $w' = w$, c'eſt à dire, ſi la quantité w étoit la même pour les deux ſituations des aſtres, on auroit $\Gamma = w\sqrt{(2 + 2 \cos \omega)} = 2w \cos \frac{\omega}{2}$, & enſuite $\cos \chi = \cos \chi'$, $\frac{1 + \cos \omega}{2 \cos \frac{\omega}{2}} =$

$\cos \frac{\omega}{2}$, & par conſéquent $\chi = \chi' = \frac{\omega}{2}$; ce qui montre que le point G tombe au milieu de l'arc HH'.

21. Nous avons trouvé ci-deſſus (art. 13.) pour un lieu quelconque L de la terre, dont la latitude eſt ψ & la longitude ϕ, l'équation

$$T = t - iw \cos \zeta.$$

Donc, ſi on ſuppoſe que les aſtres S & V aient été obſervés en même tems dans le lieu L, & dans un autre lieu quelconque M, dont la latitude ſoit Ψ & la longitude Φ, & qu'on faſſe la diſtance de ce dernier lieu au pole des parallaxes $H = \Sigma$, on aura auſſi

$$\Theta = t - iw \cos \Sigma,$$

Θ étant le tems au bout duquel aſtres S & V paroiſſent à la diſtance Z l'un de l'autre à un obſervateur placé en M.

Or, puiſque ces deux quantités T & Θ ſont données par l'obſervation, leur différence, que je nommerai Δ, le ſera auſſi, de ſorte qu'on aura l'équation

$$\Delta = iw (\cos \Sigma - \cos \zeta).$$

Mais on a (art. 10.)

$$\cos \zeta = \cos \alpha \cos \psi \cos (\phi - \beta) + \sin \alpha \sin \psi;$$

donc on aura auſſi

$$\cos \Sigma = \cos \alpha \cos \Psi \cos (\Phi - \beta) + \sin \alpha \sin \Psi, \quad \text{d'où}$$

$$\cos \Sigma - \cos \zeta = (\cos \Psi \cos \Phi - \cos \psi \cos \phi) \cos \alpha \cos \beta + (\cos \Psi \sin \Phi - \cos \psi \sin \phi) \cos \alpha \sin \beta + (\sin \Psi - \sin \psi) \sin \alpha.$$

Maintenant il eſt viſible que cette quantité peut ſe ramener à la forme

$$V \cos \alpha \cos X \cos (Y - \beta) + \sin X \sin \alpha),$$

en faiſant

V cof

$$V \cos X \cos Y = \cos \Psi \cos \Phi - \cos \psi \cos \phi,$$
$$V \cos X \sin Y = \cos \Psi \sin \Phi - \cos \psi \sin \phi,$$
$$V \sin X = \sin \Psi - \sin \psi.$$

Fig. 9. De plus il eſt évident que, ſi, dans le triangle PHF, P eſt le pole de l'équateur, H celui des parallaxes, & F le lieu qui répond à la latitude terreſtre X & à la longitude Y, en ſorte que

$$PH = 90° - \alpha, \quad PF = 90° - X, \quad \& \quad FPH = \beta - Y,$$

on aura $\cos FH = \cos \alpha \cos X \cos(\beta - Y) + \sin \alpha \sin X$, de maniere qu'en nommant ξ la diſtance du pole H au point F on aura $\cos \Sigma - \cos \zeta = V \cos \xi$.

22. Pour trouver maintenant la valeur de la quantité V, & la poſition du point F ſur le globe, on traitera les trois équations de l'art. préc. comme on a fait celles de l'art. 17, auxquelles elles ſont entierement analogues; & on trouvera

1°. que ſi on nomme λ la diſtance LM entre les deux lieux d'obſervation L & M, on aura $V = 2 \sin \frac{\lambda}{2}$;

Fig. 10. 2°. que ſi on prolonge l'arc de grand cercle LM du côté de M, & que du point du milieu l on prenne $lF = 90°$, on aura le point cherché F.

Si on vouloit connoitre la latitude & la longitude même de ce point F, on auroit ſur le champ

$$\tan Y = \frac{\cos \Psi \sin \Phi - \cos \psi \sin \phi}{\cos \Psi \cos \Phi - \cos \psi \cos \phi},$$

$$\sin X = \frac{\sin \psi - \sin \psi}{2 \sin \frac{\lambda}{2}}.$$

Ayant

Ayant déterminé ainſi la poſition du point F, on aura pour le tems qui s'écoule entre l'obſervation en L & celle en M, la formule

$$2iw \operatorname{coſ} \frac{\lambda}{2} \operatorname{coſ} \xi,$$

ξ étant la diſtance du point F au pole des parallaxes H.

23. S'il y avoit trois Obſervateurs placés en trois endroits différens L, M, N, de la ſurface de la terre, & qu'ayant décrit par ces trois points les arcs de grand cercle LMF, LNE, MND, on y prît des points du milieu l, m, n, les arcs lF, mE, nD, chacun de 90° degrés; qu'enſuite on menât, par les extrémités F, E, D de ces arcs & par le pole des parallaxes H, les arcs de grand cercle FH, EH, DH, & qu'on nommât

Fig. II.

LM	λ
LN	μ
MN	ν
coſFH	x
coſEH	y
coſDH	z

on auroit

$$\text{Tems. en L} - \text{Tems. en M} = 2iwx \operatorname{coſ} \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{Tems. en L} - \text{Tems. en N} = 2iwy \operatorname{coſ} \frac{\mu}{2},$$

$$\text{Tems. en M} - \text{Tems. en N} = 2iwz \operatorname{coſ} \frac{\nu}{2}.$$

Donc, puiſque ces différences ſont données immédiatement par les obſervations, ſi on les ſuppoſe égales à a, b, c, on aura les trois équations

$$a = 2iwx \operatorname{coſ} \frac{\lambda}{2},\ b = 2iwy \operatorname{coſ} \frac{\mu}{2},\ c = 2iwz \operatorname{coſ} \frac{\nu}{2},$$

d'où

d'où l'on tire

$$y = \frac{b \operatorname{coſ} \frac{\lambda}{2}}{a \operatorname{coſ} \frac{\mu}{2}} x,\quad z = \frac{c \operatorname{coſ} \frac{\lambda}{2}}{a \operatorname{coſ} \frac{\nu}{2}} x.$$

Or, en ſuppoſant la poſition des lieux d'obſervation L, M, N, donnée, il eſt clair que le triangle EFD ſera donné, auſſi bien que le rapport des coſinus des arcs FH, EH, DH, qui aboutiſſent au même point H, de ſorte qu'on pourra, à l'aide des équations précédentes, trouver la poſition du pole des parallaxes H.

24. Pour cela nous nommerons les diſtances

FE	L,
FD	M,
DE	N,

& nous aurons dans le triangle FEH

$$\operatorname{coſ} FHE = \frac{\operatorname{coſ} L - xy}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}},$$

dans le triangle FDH

$$\operatorname{coſ} DHF = \frac{\operatorname{coſ} M - xz}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-z^2)}},$$

& dans le triangle EDH

$$\operatorname{coſ} DHE = \frac{\operatorname{coſ} N - yz}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Mais, comme la ſomme des angles qui ſont autour de F doit faire 4 droits, on aura

$$\operatorname{coſ}(FHE + DHF) = \operatorname{coſ} DHE,$$

c'eſt à dire

$$\operatorname{coſ} FHE \times \operatorname{coſ} DHF - \operatorname{ſin} FHE \times \operatorname{ſin} DHF = \operatorname{coſ} DHE,$$

ou

ou bien en quarrant

$$(1 - (\text{cof FHE})^2)(1 - (\text{cof DHF})^2) = (\text{cof DHE} - \text{cof FHE} \times \text{cof DHF})^2,$$

& réduifant

$$1 - (\text{cof FHE})^2 - (\text{cof DHF})^2 - (\text{cof DHE})^2 + 2\,\text{cof FHE} \times \text{cof DHF} \times \text{cof DHE} = 0.$$

Donc, fubftituant les valeurs trouvées ci-deffus, & otant les dénominateurs, on aura

$$(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) - (\text{cof L} - xy)^2 (1 - z^2) - (\text{cof M} - xz)^2 (1 - y^2) - (\text{cof N} - yz)^2 (1 - x^2) + 2(\text{cof L} - xy)(\text{cof M} - xz)(\text{cof N} - yz) = 0,$$

ce qui fe réduit à

$$1 - \text{cof L}^2 - \text{cof M}^2 - \text{cof N}^2 + 2\,\text{cof L cof M cof N} - x^2 \,\text{fin N}^2 - y^2\,\text{fin M}^2 - z^2\,\text{fin L}^2 + 2xy(\text{cof L} - \text{cof M cof N}) + 2xz(\text{cof M} - \text{cof L cof N}) + 2yz(\text{cof N} - \text{cof L cof M}) = 0.$$

Or, faifant pour plus de fimplicité,

$$\frac{b\,\text{cof}\,\frac{\lambda}{2}}{a\,\text{cof}\,\frac{\mu}{2}} = m, \quad \frac{c\,\text{cof}\,\frac{\lambda}{2}}{a\,\text{cof}\,\frac{\nu}{2}} = n,$$

en forte que l'on ait $y = mx$, & $z = nx$, & fubftituant ces valeurs dans l'équation précédente, on en tirera

$$x = \sqrt{(1 - \text{cof L}^2 - \text{cof M}^2 - \text{cof N}^2 + 2\,\text{cof L cof M cof N})},$$

divifé par

$\sqrt{}$ (fin

$$\sqrt{(\text{fin N}^2 + m^2\,\text{fin M}^2 + n^2\,\text{fin L}^2 - 2m(\text{cof L} - \text{cof M cof N}) - 2n(\text{cof M} - \text{cof L cof N}) - 2mn(\text{cof N} - \text{cof L cof M}))}.$$

Ainfi l'on connoitra x, & par conféquent auffi y & z; ce qui fuffit pour déterminer la pofition du point H.

25. A l'égard des arcs L, M, & N, il eft facile de les déterminer par le moyen des arcs λ, μ & ν, qui font fuppofés connus.

En effet, dans le triangle FLE, on a FE $=$ L, LF $= \frac{\lambda}{2} + 90°$, & LE $= \frac{\mu}{2} + 90°$; donc nommant η l'angle en L, on aura cof L $=$ $\text{cof}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{cof}\,\frac{\mu}{2}\,\text{cof}\,\eta + \text{fin}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{fin}\,\frac{\mu}{2}$. De plus dans le triangle LMN, on a $\text{cof}\,\eta = \frac{\text{cof}\,\nu - \text{cof}\,\lambda\,\text{cof}\,\mu}{\text{fin}\,\lambda\,\text{fin}\,\mu}$; donc on aura

$$\text{cof L} = \frac{\text{cof}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{cof}\,\frac{\mu}{2}(\text{cof}\,\nu - \text{cof}\,\lambda\,\text{cof}\,\mu)}{\text{fin}\,\lambda\,\text{fin}\,\mu} + \text{fin}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{fin}\,\frac{\mu}{2},$$

ou bien,

$$\text{cof L} = \frac{\text{cof}\,\nu - \text{cof}\,\lambda\,\text{cof}\,\mu}{4\,\text{fin}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{fin}\,\frac{\mu}{2}} + \text{fin}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{fin}\,\frac{\mu}{2},$$

ou bien encore,

$$\text{cof L} = \frac{1 + \text{cof}\,\nu - \text{cof}\,\lambda - \text{cof}\,\mu}{4\,\text{fin}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{fin}\,\frac{\mu}{2}},$$

& l'on trouvera de même

$$\text{cof M} = -\frac{1 + \text{cof}\,\mu - \text{cof}\,\lambda - \text{cof}\,\nu}{4\,\text{fin}\,\frac{\lambda}{2}\,\text{fin}\,\frac{\nu}{2}},$$

cof

$$\operatorname{coſ} N = \frac{1 + \operatorname{coſ} \lambda - \operatorname{coſ} \mu - \operatorname{coſ} \nu}{4 \operatorname{ſin} \frac{\mu}{2} \operatorname{ſin} \frac{\nu}{2}}.$$

Ce que nous venons de démontrer touchant les différences des parallaxes obſervées en deux on trois endroits différens, doit s'appliquer de même aux différences des ſommes des parallaxes, dont nous avons traité dans l'art. 16. & ſuiv.; il faudra ſeulement ſubſtituer, dans ce cas, au pole H des parallaxes le pole G de la ſomme des parallaxes.

26. Avant de paſſer à l'application de la théorie que nous venons de donner, il eſt bon de remarquer que, comme dans la projection ordinaire des Mappemondes, qui eſt la projection *ſtéréographique* de Ptolémée, tous les cercles du globe deviennent auſſi des cercles, on pourra également transporter ſur la Mappemonde les différens cercles des parallaxes & des ſommes des parallaxes que nous avons enſeigné à tracer ſur le globe.

Si l'on connoiſſoit pour chacun de ces cercles la poſition de trois points quelconque, il n'y auroit qu'à chercher ſur la Mappemonde les points correſpondans, & le cercle qui paſſeroit par ces trois points ſeroit néceſſairement la projection du cercle décrit ſur le globe; mais, lorsqu'on ne connoit que la poſition du pole avec l'ouverture, c'eſt à dire, l'arc qui meſure la diſtance du pole à la circonférence, il eſt plus court de chercher directement le centre & le rayon de la projection.

Pour réſoudre ce probleme, ſoit AB le diametre du cercle Fig. 12.
de projection, O le lieu de l'oeil, H le pole d'un cercle décrit ſur le globe, dont MN eſt le diametre, AVBO un grand cercle de la ſphere qui paſſe par les points O & H; il eſt facile de voir qu'en menant les rayons viſuels OM, ON, le cercle MN ſera projetté par Fig. 13.
un autre cercle dont le diametre ſera ST: de ſorte qu'en diviſant la ligne ST en deux également en R, le point R ſera le centre, & la ligne RS le rayon du cercle dont il s'agit.

De plus, ſi on ſuppoſe, comme dans les Mappemondes or-
Fig. 13. dinaires, que le cercle de projection EAPQB eſt le premier méridien, & que EQ ſoit le diametre de l'équateur qui y eſt perpendiculaire, & P le pole du monde; il eſt clair qu'en menant par les points P & H l'arc de méridien PH, on aura PH égale au complément de la latitude du point H, & l'angle HPA égal à la longitude de ce même point.

Donc, ſi on nomme

la latitude du point H	α,
la longitude du même point	β,
l'arc HM, c'eſt à dire, l'ouverture du cercle MN	ζ,
l'arc AE	V,
l'arc HA	W,

Fig. 14. on aura d'abord dans le triangle HAP rectangle en A tang. AP = tang PH coſ HAP, & ſin HA = ſin PH ſin HPA, c'eſt à dire,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{coſ} \beta}, \quad \& \quad \operatorname{ſin} W = \operatorname{coſ} \alpha \operatorname{ſin} \beta.$$

Fig. 12. Enſuite on aura $AN = W + \zeta$, $AM = W - \zeta$, $CT = \operatorname{tang} VON = \operatorname{tang} \frac{VN}{2} = \cot \frac{W + \zeta}{2}$, & de même $CS = \cot \frac{W - \zeta}{2}$. Donc

$$CR = \frac{\cot \frac{W - \zeta}{2} + \cot \frac{W + \zeta}{2}}{2},$$

$$RS = \frac{\cot \frac{W - \zeta}{2} - \cot \frac{W - \zeta}{2}}{2},$$

ou bien,

$$CR = \frac{\text{ſin } W}{\text{coſ } W + \text{coſ } \zeta}, \quad RS = \frac{\text{ſin } \zeta}{\text{coſ } W + \text{coſ } \zeta}.$$

Au reſte, la ſolution de ce probleme deviendroit beaucoup plus facile, ſi dans la projection de la Mappemonde, au lieu de ſuppoſer l'oeil dans l'équateur, comme on le fait ordinairement, on le ſuppoſoit au pole même; car alors, tous les méridiens étant des lignes droites, il eſt clair que le centre du cercle ſur la Mappemonde ſe trouveroit dans le même méridien que ſur le globe, de ſorte qu'il n'y auroit qu'à marquer ſur ce méridien les deux points par où doit paſſer le cercle, & la portion de méridien interceptée entre ces deux points en ſeroit néceſſairement le diametre.

§. III. *Application de la théorie précédente aux paſſages des Planetes ſur le diſque du Soleil.*

27. Suppoſons maintenant que l'aſtre S ſoit le Soleil, & que l'aſtre V ſoit une planete quelconque qui paſſe devant lui; en faiſant $Z =$ au demi-diametre du Soleil, on aura (art. 13.) $-\, iw$ coſ ζ pour la parallaxe d'entrée, & iw' coſ ζ' pour la parallaxe de ſortie, c'eſt à dire, pour les effets de la parallaxe ſur le tems de l'entrée & de la ſortie de la planete; le ſigne $-$ marque l'accélération du contact, & le ſigne $+$ le retardement.

28. Soit (fig. 14.) S le centre du Soleil, ELC ſon diſque, Fig. 14. VV' la route de la planete V ſur ce diſque, EC l'écliptique, SL le cercle de latitude du Soleil, SD le cercle de déclinaiſon, en menant les rayons SV, SV', & la perpendiculaire SR, on aura SQ égale à la latitude de la planete au tems de la conjonction, RSQ égal à l'angle de la ligne VV' avec la ligne EC, c'eſt à dire, à l'inclinaiſon de l'orbite rélative VV' de la planete ſur l'écliptique, DSL = à l'angle de poſition du Soleil, & les angles VSD & V'SD ſeront ceux que nous avons nommés ε & ε' dans les art. 15. & 16.

Soient nommées donc,

la

la latitude de la planete au tems de la conjonction - - Λ,
l'inclinaiſon de ſon orbite rélative ſur l'écliptique - - - Υ,
l'angle de poſition au moment de l'entrée - - - Π,
l'angle de poſition au moment de la ſortie - - - - Π'.

On trouvera d'abord la moindre diſtance de centre $SR = \Lambda$ coſ Υ; enſuite faiſant l'angle $VSR = \eta$, on aura

$$\text{coſ } \eta = \frac{\Lambda \text{ coſ } \Upsilon}{Z}, \qquad \text{\& par conſéquent}$$

$$\varepsilon = \eta - \Upsilon - \Pi, \quad \varepsilon' = \eta + \Upsilon + \Pi'.$$

Connoiſſant par ce moyen les angles ε & ε', & connoiſſant auſſi les déclinaiſons du ſoleil p & p' pour les momens de l'entrée & de la ſortie, on trouvera aiſément par l'art. 14. la poſition des poles H, & H', que nous nommerons dorénavant *poles d'entrée & de ſortie;* ainſi on connoitra pour chaque lieu de la terre les angles ζ, & ζ'.

Nous remarquerons ſeulement que, comme l'angle ε' tombe de l'autre côté du cercle de déclinaiſon SD, il faudra auſſi dans la fig. 7. prendre l'arc SH de l'autre côté de PS; ainſi l'angle SPH devra être regardé comme négatif, c'eſt à dire que cet angle, au lieu d'être ſuppoſé égal à $\beta' - q'$, devra être au contraire $= q' - \beta'$.

29. A l'égard des mouvemens horaires θ & θ', il eſt facile de voir que, ſi on nomme

le mouvement horaire de la planete ſur ſon orbite rélative au moment de l'entrée - - - - ϑ,
& au moment de la ſortie - - - - ϑ',

on aura $\theta = \frac{VR}{SV}\, \vartheta$, $\theta' = \frac{VR}{SV}\, \vartheta'$, c'eſt à dire,

$$\theta = \frac{\vartheta \sqrt{(Z^2 - \Lambda^2 \text{ coſ } \Upsilon^2)}}{Z} = \vartheta \text{ ſin } \eta,$$

$\theta' =$

$$\theta' = \frac{\vartheta' \sqrt{(Z^2 - \Lambda^2 \operatorname{cof} \Upsilon^2)}}{Z} = \vartheta' \operatorname{fin} \eta.$$

Dans les paſſages de Mercure, les quantités ϑ & ϑ' peuvent différer entr'elles de quelques ſecondes, à cauſe de la grande excentricité de cette planete; mais dans ceux de Vénus la différence de ces deux quantités eſt abſolument inſenſible: il en faut dire autant des quantités u & u', qui expriment les rapports des diſtances de la planete au Soleil & à la Terre (art. 13.), de ſorte que dans ces derniers paſſages on peut ſuppoſer $w' = w$.

30. Mr. de l'Isle eſt le premier qui ait eu l'idée de tracer ſur le globe, auſſi bien que ſur la mappemonde, les différens cercles des parallaxes d'entrée & de ſortie dans les paſſages des planetes ſur le disque du Soleil. Il l'exécuta d'abord pour le paſſage de Mercure de 1753, & enſuite pour celui de Vénus de 1761; & Mr. de la Lande a rempli le même objet pour le paſſage de Vénus qui s'obſervera en 1769. Comme Mr. de l'Isle n'a point donné les principes de ſa méthode, & que Mr. de la Lande n'a déduit la ſienne que de la théorie des projections, j'ai cru qu'il n'étoit pas tout à fait inutile d'examiner cette matiere par l'analyſe; d'ailleurs, ſuivant les méthodes dont nous venons de parler, pour trouver le pole H d'entrée ou de ſortie, il faut prolonger l'arc de grand cercle SV en H, de maniere que l'on ait Fig. 7.
SH $= 90°$; au lieu que nous avons trouvé (art. 14.) que l'arc SH doit être $= 90° + s$, l'arc s étant tel que $\operatorname{fin} s = \frac{\operatorname{fin} Z}{g}$. Il eſt vrai que comme Z demi-diametre du Soleil n'eſt que d'environ 16', & que la quantité g, rapport des diſtances de la planete & de la Terre au Soleil, eſt à peu près $\frac{4}{10}$ pour Mercure, & $\frac{7}{10}$ pour Vénus, l'angle s ne ſera que d'environ 37' pour la premiere de ces deux planetes & de 22' pour la ſeconde, & qu'ainſi l'erreur ſera toujours fort petite.

Cependant, comme on pourroit appliquer la même théorie à des cas où la diſtance Z ne ſeroit plus très petite, il m'a paru important de réſoudre le probleme en toute rigueur.

31. Mais ce n'eſt pas là le ſeul avantage de notre méthode. On ſait que la plus importante de toutes les obſervations que l'on puiſſe faire dans un paſſage de Vénus, eſt celle de la durée du paſſage; auſſi le principal objet des voyages qui ont été entrepris à l'occaſion du paſſage de 1761, étoit de nous procurer des obſervations de la durée dans les lieux où les effets de la parallaxe devoient être les plus ſenſibles & les plus oppoſés; & tel eſt auſſi, je crois, le but des voyages auxquels les Aſtronomes ſe diſpoſent actuellement.

Or, ſuivant ce que nous avons démontré dans l'art. 18 & ſuiv., la parallaxe de durée eſt exprimée en général par

$$i \sqrt{(w^2 + 2ww' \operatorname{cof} \omega + w'^2)} \times \operatorname{cof} z,$$

z étant la diſtance du lieu d'obſervation au pole G, dont la poſition eſt donnée ſur le globe; de ſorte que la parallaxe dont il s'agit ſera abſolument nulle dans les lieux placés ſous la circonférence du grand cercle qui auroit le même point G pour pole, & qu'elle croitra en raiſon des ſinus des diſtances à ce même cercle. On pourroit donc auſſi, ſi on vouloit tracer ſur un globe, ou ſur une mappemonde, différens cercles *de durée*, c'eſt à dire tels, que la durée du paſſage fût la même pour tous les pays qui ſe trouveroient dans la circonférence de chacun d'eux; l'opération ſeroit abſolument la même que pour les cercles d'entrée & de ſortie de Mr. de l'Isle, en prenant, au lieu du pole H ou H', le pole G (art. 19.).

32. Ma méthode donne de plus un moyen facile de comparer entr'elles les obſervations, ſoit de l'entrée ou de la ſortie, ſoit de la durée du paſſage, faites en pluſieurs endroits. Car nous avons trouvé que la différence entre les momens de l'entrée ou de la ſortie pour deux endroits quelconques eſt exprimée généralement par

$$2iw \operatorname{cof} \frac{\lambda}{2} \operatorname{cof} \xi,$$

les angles λ & ξ dépendant de la poſition des lieux d'obſervation, & de celle des poles d'entrée ou de ſortie (art. 22.).

Il en

Il en eſt de même des différences de durée, en prenant le pole de durée à la place de celui d'entrée ou de ſortie.

Ainſi, connoiſſant exactement la poſition des lieux d'obſervation, & ayant déterminé, ſoit par les tables, ſoit par l'obſervation même, les élémens d'où dépend la poſition des poles (art. 28.), on trouvera immédiatement la valeur de i, c'eſt à dire, la parallaxe du Soleil, qui eſt le principal objet des obſervations des paſſages de Vénus.

33. Si on avoit trois obſervations faites en trois endroits différens, on n'auroit beſoin que de connoitre la poſition de ces trois lieux, pour pouvoir déterminer la parallaxe i du Soleil; car, dans les formules des art. 23. & ſuiv., on auroit par obſervation les valeurs des quantités a, b, c, différences entre les tems, ſoit de l'entrée, ſoit de la ſortie, ou de la durée, obſervés dans les trois lieux donnés; enſuite les diſtances reſpectives de ces mêmes lieux donneroient les valeurs des angles λ, μ, ν, & par conſéquent auſſi celles des angles L, M, N (art. 25.); ainſi on trouveroit la valeur de x (art. 24.), laquelle étant miſe dans l'équation $a = 2iwx \cos\frac{\lambda}{2}$, on en tireroit la valeur de i.

34. Cette méthode de connoitre la parallaxe du Soleil par le moyen de trois obſervations me paroit la plus commode & la plus exacte de toutes; il faut ſeulement remarquer que, ſi on veut ſe ſervir des obſervations de l'entrée ou de la ſortie, il eſt néceſſaire de connoitre avec une très grande préciſion les différences des méridiens des lieux d'obſervation, pour avoir les valeurs exactes des différences des tems a, b, c; mais, ſi on employe les durées obſervées, les différences des méridiens n'entreront plus que dans la détermination des quantités λ, μ, ν, & par conſéquent il ſuffira qu'elles ſoient connues à très peu près, auſſi bien que les latitudes des lieux.

35. Au reſte, pour ſavoir, ſi le paſſage ſera viſible dans un lieu quelconque donné L, il n'y aura qu'à chercher la hauteur du Soleil dans ce lieu aux momens de l'entrée & de la ſortie.

Soit donc la hauteur du Soleil au deſſus de l'horizon du lieu L
au moment de l'entrée - - - - - σ,
la hauteur au moment de la ſortie - - - σ';
il eſt clair que la diſtance du même lieu L aux lieux de la terre auxquels le Soleil ſera perpendiculaire aux momens de l'entrée & de la ſortie, & qui ſont déterminées par les latitudes α & α', & par les longitudes β & β', il eſt clair, dis-je, que ces diſtances ſeront les complémens des angles σ, & σ'; c'eſt pourquoi on aura

$$\sin\sigma = \cos\alpha \cos\psi \cos(\beta - \phi) + \sin\alpha \sin\psi, \qquad \&$$
$$\sin\sigma' = \cos\alpha' \cos\psi \cos(\beta' - \phi) + \sin\alpha' \sin\psi.$$

36. Remarque. Lorſque l'angle Z eſt fort petit, on pourroit avoir quelque ſcrupule ſur la réduction que nous avons faite (art. 13.) de l'équation $\cos Z' = \cos Z + iu \sin Z \cos\zeta$ à $Z' = Z - iu \cos\zeta$; car, ſoit $Z' = Z + \pi$, on aura $\cos Z' = \cos Z - \pi \sin Z - \frac{\pi^2}{2}\cos Z + \&c.$;

donc $\pi \sin Z + \frac{\pi^2}{2} \cos Z - \&c. = - iu \sin Z \cos\zeta$,

& par conſéquent

$$\pi + \frac{\pi^2 \cot Z}{2} - \&c. = - iu \cos\zeta,$$

d'où l'on tire

$$1^\circ.\ \pi = - iu \cos\zeta,$$
$$2^\circ.\ \pi = - iu \cos\zeta - \frac{i^2u^2 \cot Z \cos\zeta^2}{2},$$

& ainſi de ſuite. Or, comme i eſt une quantité fort petite, nous avons cru pouvoir nous en tenir à la premiere valeur approchée de π, ſavoir $- iu \operatorname{coſ} \zeta$, d'où réſulte l'équation $Z' = Z - iu \operatorname{coſ} \zeta$; cependant, lorſque l'angle Z eſt aſſez petit pour que la valeur de cot Z ſoit fort conſidérable, il eſt clair que le terme $\frac{i^2 u^2 \cot Z \operatorname{coſ} \zeta^2}{2}$ ne doit plus être négligé vis-à-vis du terme $iu \operatorname{coſ} \zeta$.

Pour apprécier l'effet qui réſulteroit d'une telle négligence dans les paſſages des planetes ſur le diſque du Soleil, nous remarquerons que le rapport des termes dont il s'agit eſt exprimé en général par $\frac{iu \cot Z \operatorname{coſ} \zeta}{2}$; de ſorte que ſa plus grande valeur eſt de $\frac{iu \cot Z}{2}$. Or on a environ $Z = 16'$, $i = \operatorname{ſin} 10''$, $u = 0,6316$ pour Mercure, & $= 2,6144$ pour Vénus, d'où l'on trouvera pour les paſſages de Mercure

$$\frac{iu \cot Z}{2} = 0,003284,$$

& pour ceux de Vénus

$$\frac{iu \cot Z}{2} = 0,013594.$$

Ainſi l'erreur ne ſera dans le premier cas que de $\frac{3}{1000}$ du total, mais il ſera de $\frac{13}{1000}$ dans le ſecond, de ſorte que ſi le plus grand effet de la parallaxe étoit de $8'$, comme il le ſera à très peu près dans le paſſage de 1769, la plus grande erreur ſeroit d'environ $6''$.

Au reſte, quelque petite que ſoit cette erreur, ſi quelque calculateur ſcrupuleux vouloit abſolument l'éviter, il le pourroit aiſément. Pour cela il ſuffiroit de remarquer que $\operatorname{coſ} Z' - \operatorname{coſ} Z = 2 \operatorname{ſin} \frac{Z' - Z}{2} \times \operatorname{ſin} \frac{Z' + Z}{2} \doteq$ (en faiſant $Z' = Z + \pi$) $2 \operatorname{ſin} \frac{\pi}{2} \operatorname{ſin} \left(Z + \frac{\pi}{2}\right)$, de ſorte qu'on auroit rigoureuſement l'équation

$$2 \operatorname{ſin} \frac{\pi}{2} \operatorname{ſin} \left(Z + \frac{\pi}{2}\right) = - iu \operatorname{ſin} Z \operatorname{coſ} \zeta,$$

ou bien, à cauſe que π eſt un angle fort petit,

$$\pi \operatorname{ſin} \left(Z + \frac{\pi}{2}\right) = - iu \operatorname{ſin} Z \operatorname{coſ} \zeta,$$

d'où l'on tire

$$\pi = - \frac{iu \operatorname{ſin} Z}{\operatorname{ſin} \left(Z + \frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{coſ} \zeta,$$

ou bien, en ſubſtituant pour π ſa premiere valeur approchée $- iu \operatorname{coſ} \zeta$,

$$\pi = - \frac{iu \operatorname{ſin} Z \operatorname{coſ} \zeta}{\operatorname{ſin} \left(Z - \frac{iu \operatorname{coſ} \zeta}{2}\right)},$$

d'où l'on voit qu'il n'y aura qu'à augmenter la parallaxe d'entrée en raiſon de $\frac{\operatorname{ſin} Z}{\operatorname{ſin} \left(Z - \frac{iu \operatorname{coſ} \zeta}{2}\right)}$ à 1, & la parallaxe de ſortie en celle de $\frac{\operatorname{ſin} Z}{\operatorname{ſin} \left(Z - \frac{iu' \operatorname{coſ} \zeta'}{2}\right)}$ à 1.

A l'égard de la parallaxe de durée, comme elle doit être égale à la ſomme des deux parallaxes d'entrée & de ſortie (art. 18.), il n'y aura qu'à y ajouter ces deux corrections,

$$\frac{i \cot Z}{2} u \operatorname{coſ} \zeta \times \text{parall. d'entrée}$$

$$+ \frac{i \cot Z}{2} u' \operatorname{coſ} \zeta' \times \text{parall. de ſortie.}$$

Ainſi, lorſqu'on voudra faire uſage de la méthode de l'art. 23. pour déduire la parallaxe du Soleil de trois obſervations, il faudra pour plus d'exactitude appliquer d'abord ces corrections aux obſervations mêmes; mais je crois que cette précaution ſera le plus ſouvent ſuperflue.

§. IV. *Du paſſage de Vénus qui s'obſervera le 3. Juin 1769 au ſoir.*

37. Comme les circonſtances de ce paſſage ont déjà été déterminées par différens Aſtronomes, & ſurtout par Mrs. Pingré & de la Lande, d'après les tables de Mr. Hallei, corrigées ſur les obſervations du paſſage de 1761, & que leurs réſultats s'accordent d'ailleurs à tres peu près, j'ai cru pouvoir me diſpenſer de les calculer de nouveau, & je me ſuis contenté d'emprunter de Mr. de la Lande les élémens ſuivans:

tems vrai de la conjonction au méridien de Paris	$10^h\ 9'\ 53''$,
longitude du ſoleil	$2^s\ 13^\circ\ 27'\ 10''$,
latitude géocentrique de Vénus	$10'\ 13''\ 4$,
inclinaiſon de l'orbite rélative de Vénus ſur l'écliptique	$8^\circ\ 29'\ 0''$,
mouvement horaire de Vénus ſur l'orbite rélatiue	$4'\ 0''$,
mouvement horaire du Soleil	$2'\ 13''\ 5$,
la diſtance du Soleil à la Terre (en ſuppoſant la moyenne $= 1$)	$1,01514$,
la diſtance de Vénus au Soleil	$0,72627$,
le demi-diametre du Soleil	$15'\ 47''$,
le demi-diametre de Vénus	$29''$.

38. Ainſi on aura d'abord

$$\Lambda = 10'\ 13''\ 4,$$
$$\vartheta = \vartheta' = 4'\ 0'',$$
$$\Upsilon = 8^\circ\ 29'\ 0'',$$
$$Z = 15'\ 47'',$$
$$r = 1,01514,$$
$$f = 0,72627,$$

d'où

d'où l'on trouvera

$$A \cos \Upsilon = 10'\ 6'',7,$$
$$\eta = 50^\circ\ 9'\ 37'',$$
$$\theta = \theta' = 184'',26,$$
$$R = r - f = 0,28887,$$
$$lg = 9,8545722,$$
$$s = 22'\ 3'',$$
$$lu = lu' = 0,4003957,$$
$$lw = lw' = 1,6912165,$$

d'où

$$w = w' = 49'',115.$$

(J'ai multiplié ici la valeur de $\frac{u}{\theta}$ par 3600 pour avoir la valeur de w en ſecondes.)

A l'égard de i on remarquera que, comme le mouvement horaire θ eſt exprimé en ſecondes, il faudra de même exprimer en ſecondes la parallaxe du Soleil; de ſorte que la quantité i dénotera le nombre des ſecondes qui déterminent cette parallaxe.

39. Maintenant on trouvera dans la fig. 14. du §. préc.

$$l.\ VR = 2,8616200,$$
$$l.\ QR = 1,9565997,$$

d'où, en réduiſant ces quantités en tems, à raiſon de $4', 0''$ par heure, on aura

la demi-demeure du centre de Vénus ſur le diſque	$3^h\ 1'\ 47''$,
la différence entre la conjonction & le milieu du paſſage, laquelle doit s'ajouter à la conjonction	$22'\ 37''$.

De ſorte qu'on aura au méridien de Paris,

l'entrée du centre à	$7^h\ 30'\ 43''$,
le milieu du paſſage à	$10^h\ 32'\ 30''$,
la ſortie du centre à	$13^h\ 34'\ 17''$.

Or

Or l'intervalle entre le commencement du paſſage & la conjonction étant de $2^h\ 39', 10''$, & l'intervalle entre la conjonction & la fin du paſſage étant de $3^h\ 24'\ 24''$, on trouvera $6'\ 20''$ à retrancher de la longitude du Soleil au tems de la conjonction, & $8'\ 8''$ à y ajouter, pour avoir les longitudes aux momens de l'entrée & de la ſortie; de ſorte qu'on aura

longitude du Soleil pour l'entrée - - $2^s\ 13°\ 20'\ 50''$,
longitude du Soleil pour la ſortie - - - $2^s\ 13°\ 35'\ 18''$,

d'où l'on trouvera, en ſuppoſant l'obliquité de l'écliptique de $23°\ 28'\ 10''$, telle qu'elle ſera au mois de Juin 1769,

$$p = 22°\ 25'\ 46'', \qquad p' = 22°\ 27'\ 33'',$$
$$\Pi = 7°\ 5'\ 30'', \qquad \Pi' = 6°\ 59'\ 35'',$$

& par conſéquent

$$\epsilon = 34°\ 35'\ 7'', \qquad \epsilon' = 65°\ 38'\ 12''.$$

Enfin, en convertiſſant les tems de l'entrée & de la ſortie en degrés à raiſon de 15° par heure, on aura les angles horaires du Soleil par rapport à Paris, comptés d'orient en occident; donc, en prenant les complémens de ces angles à 360°, & y ajoutant 20° longitude de Paris, on aura par rapport au premier méridien

$$q = 267°\ 19'\ 15'', \qquad q' = 176°\ 25'\ 45''.$$

40. Cela poſé, on aura dans le triangle PSH, $PS = 90° - p$, $SH = 90° + s$, $PSH = \epsilon$ pour l'entrée, & $PS = 90° - p'$, $SH = 90° + s$, $PSH = \epsilon'$ pour la ſortie (art. 14. & ſuiv.); ainſi on trouvera 1°. le côté PH qui ſera dans le premier cas $= 90° - \alpha$, & dans le ſecond $= 90° - \alpha'$; 2°. l'angle SPH, qui ſera dans le premier cas $= \beta - q$, & dans le ſecond $= q' - \beta'$; de ſorte qu'on connoîtra par ce moyen les latitudes α, α', & les longitudes β, β' des poles d'entrée & de ſortie. Fig. 7.

On trouvera donc

$\alpha =$

$$\alpha = 49°\ 20'\ 7'', \qquad \beta = 26°\ 44'\ 13'',$$
$$\alpha' = 22°\ 15'\ 27'', \qquad \beta' = 76°\ 15'\ 8''.$$

41. Pour trouver maintenant le pole de durée, on remarquera qu'à cauſe de $w = w'$, ce pole tombera préciſément au milieu de l'arc qui paſſe par les deux poles d'entrée & de ſortie art. 19.

Fig. 15. Soit donc P le pole du globe terreſtre H, & H' les poles d'entrée & de ſortie, & G le pole de durée, en ſorte que $H'G = \frac{1}{2}HH'$; on aura dans le triangle HPH', $PH = 90° - \alpha$, $PH' = 90° - \alpha'$, & $HPH = \beta' - \beta$; ainſi on trouvera le côté $HH' = \omega$, & l'angle H'; enſuite, dans le triangle PHG, connoiſſant les côtés H'P & H'G, avec l'angle compris H', on trouvera le côté $PG = 90° - A$, & l'angle $H'PG = \beta' - B$.

On aura donc

$$\omega = 47°\ 14'\ 44'',$$
$$A = 38°\ 21'\ 53'',$$
$$B = 56°\ 4'\ 23'';$$

& comme $\Gamma = 2w \operatorname{cof} \frac{\omega}{2}$ (art. 20.), on aura

$$\frac{\Gamma}{2} = 45'',000, \quad l.\ 1,6532083.$$

42. Voilà tous les élémens néceſſaires pour calculer les parallaxes d'entrée, de ſortie & de durée dans le prochain paſſage de Vénus ſur le Soleil; nous allons les remettre ici en peu de mots ſous les yeux de l'Académie.

Le lieu du pole d'entrée eſt à $49°\ 20'\ 7''$ de latitude, & à $26°\ 44'\ 13''$ de longitude; ainſi ce pole tombe entre Francfort & Nuremremberg près de Miltenberg.

Le lieu du pole de ſortie eſt à $22°\ 15'\ 27''$ de latitude, & à $76°\ 15'\ 8''$ de longitude; de ſorte qu'il tombe près de Maſcate en Arabie.

En-

Enfin le pole de durée eſt à $38^\circ\ 21'\ 53''$ de latitude, & à $56^\circ\ 4'\ 23''$ de longitude, c'eſt à dire, à environ deux degrés tant à l'orient qu'au nord de la ville d'Alexandrette.

Ces trois poles étant ainſi déterminés, ſi on nomme ζ la diſtance d'un lieu quelconque de la terre au pole d'entrée, ζ' ſa diſtance au pole de ſortie, & z la diſtance du même lieu au pole de durée, on aura, en dénotant par i le nombre des ſecondes de la parallaxe du Soleil,

	effet de la parallaxe
ſur l'entrée du centre - - -	$-\ 49'',115\ i\ \cos\zeta$,
ſur la ſortie du centre - - - -	$+\ 49'',115\ i\ \cos\zeta'$,
ſur la demi-durée du paſſage - - -	$+\ 45'',000\ i\ \cos z$

le ſigne — marque l'accélération, & le ſigne + le retardement par rapport au centre de la terre.

De là on voit, 1°. qu'en ſuppoſant la parallaxe du Soleil de $10''$, le plus grand effet de la parallaxe ſur l'entrée & la ſortie ſera de $491''$ ou de $8'\ 11''$, & ſur la durée de $900''$ ou de $15'\ 0''$; 2°. que les lieux les plus favorables pour obſerver ce paſſage ſont ceux qui ſont le plus près de l'un des trois poles, ou des points qui leur ſont diamétralement oppoſés; & comme dans la plus grande partie de l'Europe on ne pourra gueres voir que l'entrée de Vénus, il ſera avantageux de l'obſerver le plus près qu'il ſera poſſible du pole d'entrée.

43. La différence des méridiens entre Berlin & Paris étant de $44'\ 25''$ orientale, on aura pour le méridien de Berlin

$$\text{l'entrée du centre à } 8^h\ 15'\ 8''.$$

Or la latitude de Berlin étant de $52^\circ\ 32'\ 30''$, & la longitude de $31^\circ\ 6'\ 15''$, on trouvera

$$\cos\zeta = 0,9658485,$$

& l'entrée y ſera accélérée de $47'',438\ i$; de ſorte qu'en faiſant $i = 10$, on aura $7'\ 54''$ pour l'effet de la parallaxe à Berlin.

Si on vouloit corriger ce réſultat ſuivant la remarque de l'art. 36, il faudroit le multiplier par $\frac{\sin 15'\ 47''}{\sin 15'\ 35''}$, c'eſt à dire par $1,012826$, ce qui donneroit $48'',047\ i$ pour l'effet de la parallaxe, laquelle, en faiſant $i = 10$, ſeroit donc de $8'\ 0''$, c'eſt à dire de $6''$ plus grande. Ainſi l'entrée du centre de Vénus ſe verra à Berlin à $8^h\ 7'\ 8''$.

On voit par-là que Berlin eſt un des pays de l'Europe, où l'effet de la parallaxe ſur l'entrée ſera le plus ſenſible; mais comme le Soleil ſera près de ſe coucher, l'obſervation ne pourra gueres ſe faire avec ſuccès. En effet, ayant calculé la hauteur du Soleil à $8^h\ 7'$, j'ai trouvé qu'elle ne doit être que de $1^\circ\ 43'$; de ſorte que l'obſervation de l'entrée de Vénus ſera néceſſairement fort équivoque, & ne ſera preſque d'aucune utilité.

44. En jettant les yeux ſur la carte de l'Allemagne, je vois que la ville d'Emden aura à peu près le même avantage que Berlin par rapport à l'effet de la parallaxe; mais elle aura de plus l'avantage que l'entrée y pourra être obſervée à quelques degrés d'élévation au deſſus de l'horizon; condition néceſſaire pour le ſuccès de l'obſervation.

Je trouve par la carte de Mr. Mayer que la poſition d'Embden eſt environ à $53^\circ\ 20'$ de latitude & à $24'\ 48'$ de longitude; ce qui donne $\cos\zeta = 0,9973457$, & par conſéquent $48'',985\ i$ pour l'accélération de l'entrée cauſée par la parallaxe, à quoi il faudra encore ajouter $6''$ pour plus d'exactitude, comme nous avons fait pour Berlin.

Ainſi, faiſant $i = 10$, on aura pour Embden $8'\ 16''$ d'accélération ſur l'entrée de Vénus, c'eſt à dire $16''$ de plus que pour Berlin. Outre cela la hauteur du centre du Soleil y ſera au tems de l'entrée de $3^\circ\ 57'$; ce qui paroit ſuffiſant pour le ſuccès de l'obſervation; ainſi je crois que Embden eſt de toutes les villes des Etats du Roi celle où l'obſervation du paſſage de 1769 pourra ſe faire avec le plus d'exactitude & de fruit.

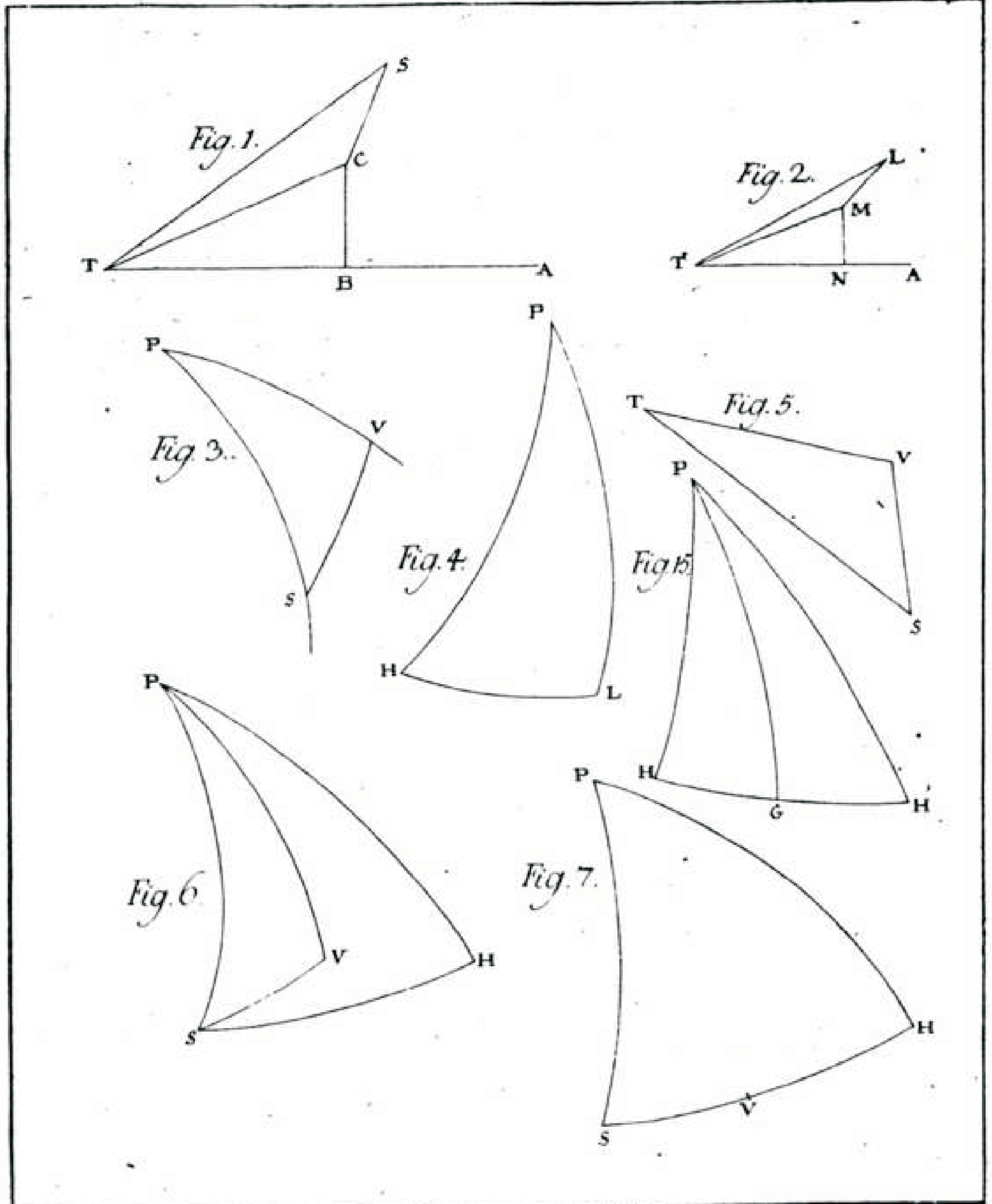
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 15.
T
S
C
B
A
L
M
N
P
V
H
G
H'

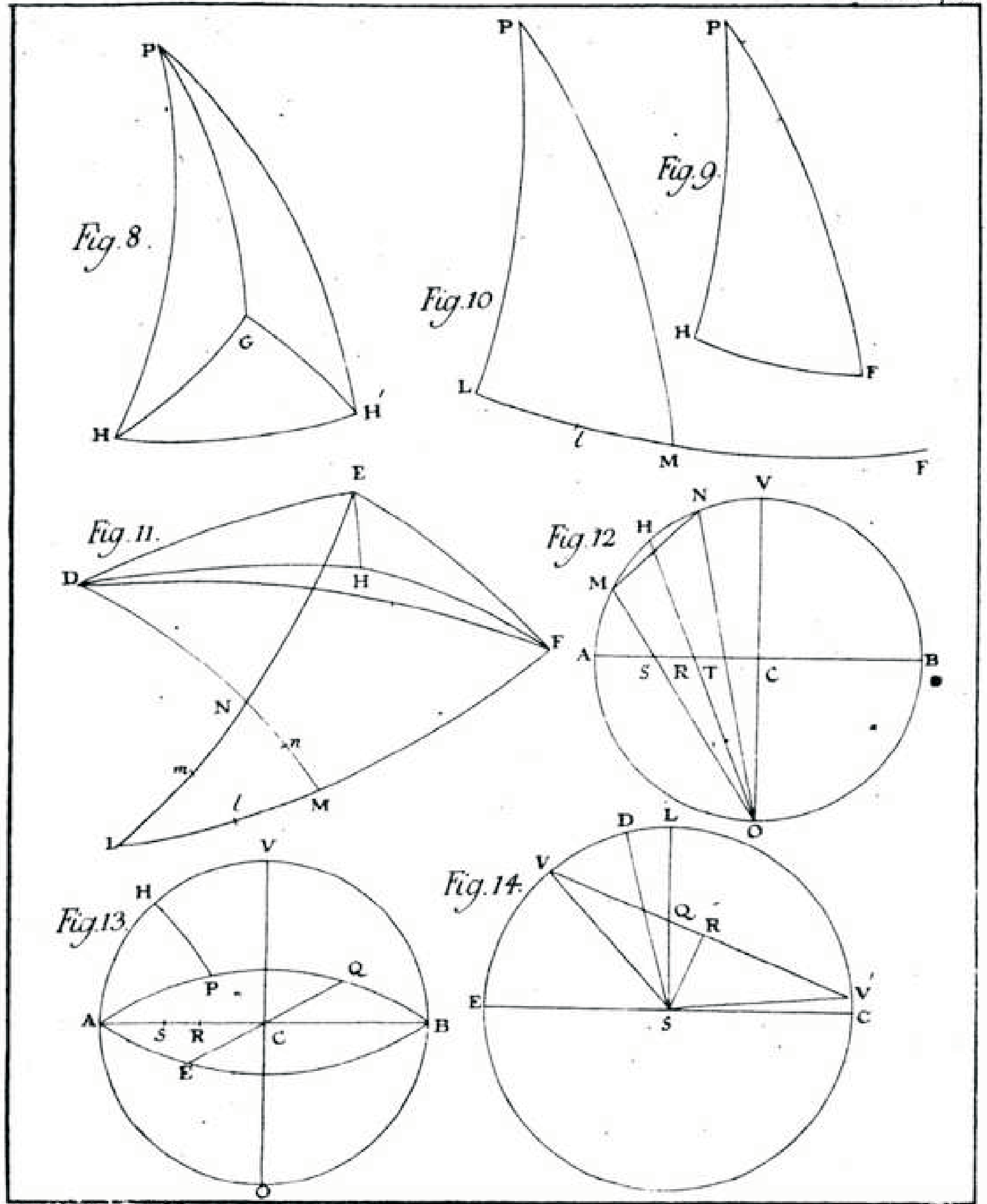
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
P
G
H
H'
F
L
l
M
E
D
N
n
m
A
B
S
R
T
C
V
O
Q
D
L
E
C
V'

45. Nous n'avons confidéré jufqu'ici que l'entrée & la fortie du centre de Vénus: or le demi-diametre de Vénus étant de $29''$, il n'y aura qu'à divifer cette quantité par le mouvement horaire θ de Vénus par rapport au centre du foleil, pour avoir le tems dont les contacts des bords de Vénus & du Soleil précéderont ou fuivront l'entrée & la fortie du centre; & l'on trouvera, en réduifant ce tems en fecondes, $567''$ ou bien $9' \, 27''$. Ainfi, en retranchant du tems de l'entrée du centre $9' \, 27''$, ou les ajoutant à celui de la fortie, on aura les tems des deux contacts extérieurs, & réciproquement, en ajoutant $9' \, 27''$ au tems de l'entrée, & les retranchant du tems de la fortie, on aura les momens des deux contacts intérieurs.

46. Lorsqu'on ne peut obferver ni l'entrée ni la fortie, on doit s'attacher principalement à déterminer la moindre diftance apparente des centres.

Or il eft aifé de trouver par notre théorie l'effet que la parallaxe doit produire fur cette diftance; pour cela il n'y aura qu'à faire $Z = \Lambda \cos \Upsilon$, $\epsilon = \Upsilon$, & chercher enfuite le pole des parallaxes de la même maniere que pour l'entrée ou la fortie, ayant foin feulement de prendre pour p & q les valeurs qui conviennent au tems du milieu du paffage; après quoi, nommant en général ξ la diftance d'un lieu quelconque de la terre à ce pole, on aura (art. 13.) $- iu \cos \xi$ pour la parallaxe de la moindre diftance des centres.