

Démonstration des théorèmes sur les projections stéréographiques.

498. Théorème I. — *Tout cercle de la sphère a pour projection stéréographique un autre cercle.*

Pour le prouver, soient (fig. 142) O la sphère, ASB le tableau, V le point de vue, EGF le cercle donné ; je mène OI perpendiculaire au plan de ce cercle, et par OV et OI je fais passer un plan qui est perpendiculaire au tableau et au cercle EGF, et qui les coupe suivant les diamètres AB et EF ;

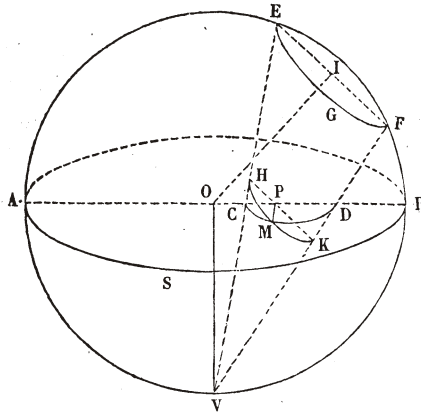


Fig. 142.

soit EABF le grand cercle, intersection de ce plan avec la sphère. Soient, en outre, C la perspective du point E, D celle du point F, et CMD celle du cercle EGF ; je veux prouver que CMD est un cercle dont CD est le diamètre. En effet, si d'un point quelconque M de cette courbe on abaisse une perpendiculaire MP sur le diamètre CD, elle est perpendiculaire au plan EABF ; et si l'on mène par cette droite un plan parallèle à EGF, il coupe

le cône VEF suivant un cercle HMK, dont HPK est le diamètre. Or MP est perpendiculaire sur ce diamètre ; donc

$$\overline{MP}^2 = \text{HP} \times \text{PK}. \quad (1)$$

Mais l'angle E a pour mesure $\frac{BV + FB}{2}$, ou $\frac{90^\circ + FB}{2}$, et l'angle PDK a pour mesure $\frac{AV + FB}{2}$, ou $\frac{90^\circ + FB}{2}$; donc ces deux angles sont égaux. D'ailleurs l'angle E = l'angle CHP ; donc l'angle CHP = l'angle PDK ; de plus, les angles CPH, DPK sont égaux ; donc les triangles CPH, DPK sont semblables ; donc $\frac{PH}{PD} = \frac{PC}{PK}$, ou $\text{PH} \times \text{PK} = \text{PC} \times \text{PD}$. Donc l'égalité (1) devient

$$\overline{MP}^2 = \text{PC} \times \text{PD}.$$

Donc M appartient à un cercle dont CD est le diamètre. C. Q. F. D.

Scolie. — Il y a exception pour les cercles dont les plans passent par le point de vue ; ceux-là ont pour projections des lignes droites.

499. Théorème II. — *Si deux lignes courbes, tracées sur l'hémisphère, se coupent sous un certain angle, leurs projections stéréographiques se coupent sous le même angle.*

Premier cas. Considérons d'abord le cas de deux grands cercles, AIB, IGC, dont le premier contient l'axe optique OV (fig. 143) ; leur angle est celui de leurs tangentes IT, IT' au point I. La projection du point I est I' ; celle de l'arc IA est la droite I'A, et celle de l'arc IG est l'arc I'G. La tangente IT se projette sur IT', et la tangente IT', qui perce le tableau en T', se projette sur la droite IT', tangente à l'arc I'G au point I'. Il faut démontrer que l'angle TIT' = l'angle T'I'I'.

Or, l'angle TII' a pour mesure $\frac{AI + AV}{2}$, et l'angle T'I'I' a pour mesure

$\frac{AI + BV}{2}$; donc ces deux angles sont égaux, et $TI = TI'$. D'un autre côté, le plan TIT' est perpendiculaire au rayon OI , et par suite au plan AIB ; le tableau AGB est aussi perpendiculaire au plan AIB , puisque ce dernier contient

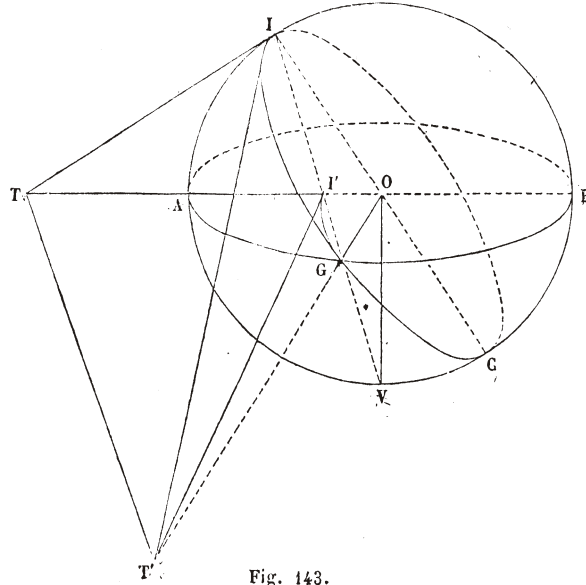


Fig. 143.

l'axe optique OV ; leur intersection TT' est donc perpendiculaire à ce plan, et par conséquent aux droites TI, TI' , qui passent par son pied dans ce plan. Ainsi les deux triangles $ITT', I'TT'$, ont chacun un angle droit au point T , compris entre deux côtés égaux, et sont égaux; donc les angles $TIT', TI'T'$, sont égaux. C. Q. F. D.

Deuxième cas. Considérons maintenant deux grands cercles quelconques IGC, IKC (fig. 144); on peut toujours mener par leur diamètre commun IC , et par l'axe OV , un plan qui détermine le grand cercle $AIBV$. Or le théorème est vrai (1^{er} cas) pour les angles que ce grand cercle fait avec chacun des deux premiers; donc il est vrai aussi pour l'angle GIK , qui est leur somme ou leur différence. Ainsi, dans la figure 144, l'angle $AIG = AI'G$, et l'angle $AIK = AI'K$; donc :

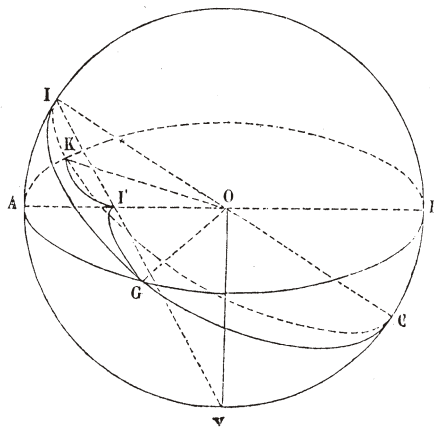


Fig. 144.

$$AIG + AIK = AI'G + AI'K, \quad \text{ou} \quad GIK = G'I'K.$$

Troisième cas. Considérons enfin deux petits cercles, ou deux courbes quelconques tracées sur la sphère : on peut, par chaque tangente au point commun et par le centre, mener deux grands cercles, pour lesquels le théorème est vrai. Or les tangentes sont les mêmes pour les deux courbes et pour les deux cercles ; leur angle est donc le même ; il en est de même de l'angle de leurs projections. Donc le théorème est général.

Corollaire. — *Les figures infiniment petites, tracées sur la sphère, se projettent suivant des figures semblables.* Car un triangle et sa projection ont leurs angles égaux, et sont semblables ; par suite, les polygones et leurs projections sont composés de triangles semblables, et sont semblables.

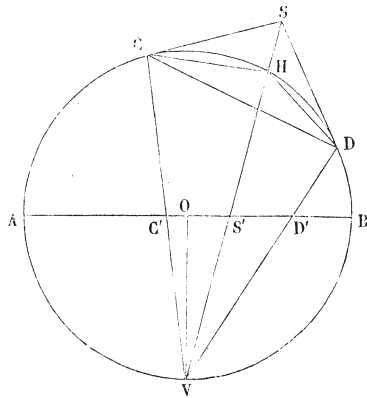


Fig. 145.

500. Théorème III. — *Le centre de la projection stéréographique d'un cercle de la sphère est la projection du sommet du cône circonscrit à ce cercle.*

Soit AVBD (fig. 145) le grand cercle d'intersection de la sphère avec un plan mené par l'axe optique VO perpendiculairement au cercle dont il s'agit ; soient CD le diamètre de ce cercle, et AB le diamètre du tableau, situés dans le plan sécant. Les tangentes CS, DS déterminent le sommet S du cône circonscrit ; et les projections des trois points C, S, D,

sont C', S', D'. Ainsi le cercle CD a pour projection un cercle dont C'D' est le diamètre (Th. I) ; et il s'agit de démontrer que le point S' est le centre, c'est-à-dire que C'S' = S'D'.

Or, les deux triangles SCH, SCV sont semblables ; car l'angle S est commun, et l'angle SCH est égal à l'angle CVS comme ayant même mesure ; donc $\frac{CH}{CV} = \frac{CS}{VS}$. Par la même raison, les deux triangles SDH, SDV donnent : $\frac{DH}{DV} = \frac{DS}{VS}$; et comme CS = DS, il y a un rapport commun, et l'on a :

$$\frac{CH}{CV} = \frac{DH}{DV}. \quad (1)$$

D'un autre côté, l'angle CHV a pour mesure $\frac{AV + AC}{2}$, et l'angle VC'S' $\frac{BV + AC}{2}$; ces deux angles sont donc égaux, et les triangles HCV, C'VS' sont semblables ; on a donc :

$$\frac{CH}{CV} = \frac{C'S'}{S'V}.$$

Par la même raison,

$$\frac{DH}{DV} = \frac{D'S'}{S'V},$$

dans les triangles semblables HDV, D'VS'. Or, d'après (1), les premiers rapports de ces deux égalités sont égaux ; donc

$$\frac{C'S'}{S'V} = \frac{D'S'}{S'V},$$

et, par conséquent,

$$C'S' = S'D'. \quad \text{C. Q. F. D.}$$