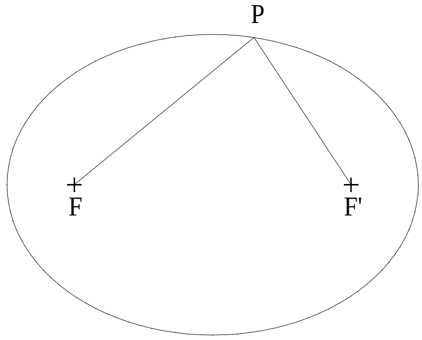
De l'ellipse

Définition

Ellipse : lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

$$FP + F'P = C^{te}$$

F et *F'* sont les foyers de l'ellipse.

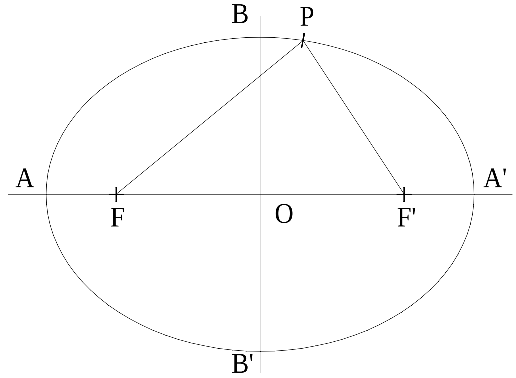


On définit : $a = OA = OA'$: demi-grand axe
$b = OB = OB'$: demi-petit axe
$c = OF = OF'$

Soit *k* constante, *la* somme des deux longueurs.
On a :

$$2a = k$$

En effet, le point *P* étant en *A*, on écrit



$$FA + AF' = FA + AO + OF' = a + FA + OF' = k$$

$$OF = OF'$$

$$FA + OF = a$$

$$2 \cdot a = k$$

On pose, $c/a = e$: ellipticité.
Dans le triangle *FOB*, $FB = a$, $OB = b$, $OF = c$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

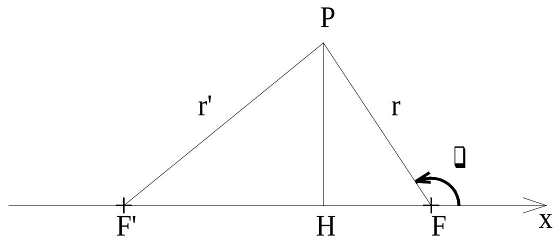
$$c = a \cdot e$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Equation de l'ellipse

I – Coordonnées polaires

Un point *P* est repéré à partir de l'origine *F* par sa distance *r* (*FP*) et l'angle θ (xFP)



Dans le triangle *F'HP*, on exprime *r'* en fonction de *r* et θ

$$r'^2 = \overline{F'H}^2 + \overline{HP}^2$$

$$r + r' = (2a - r)^2 = \left(\overline{F'F} + \overline{FH}\right)^2 + (r \cdot \sin\theta)^2$$

$$r + r' = (2 \cdot c + r \cdot \cos\theta)^2 + (r \cdot \sin\theta)^2$$

On développe et simplifie

$$4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot r + r^2 = 4 \cdot c^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos\theta + (r \cdot \cos\theta)^2 + (r \cdot \sin\theta)^2$$

$$4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot r = 4 \cdot c^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos\theta$$

$$a^2 - a \cdot r = c^2 + c \cdot r \cdot \cos\theta$$

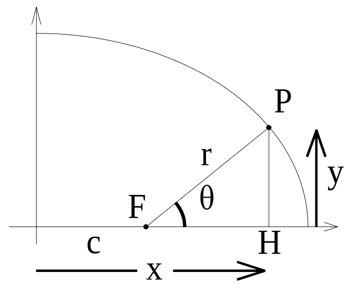
On regroupe les terrmes en *r*

$$r(a + c \cdot \cos\theta) = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 \cdot e^2$$

$$r(a + a \cdot e \cdot \cos\theta) = a^2\left(1 - e^2\right)$$

$$\boxed{r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e \cdot \cos\theta}}$$

II – Coordonnées cartésiennes



On part de l'équation en coordonnées polaires :

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cdot\cos\theta}$$

et de la relation dans le triangle rectangle *FHP*

$$r^2 = \left(x-c\right)^2 + y2$$

$$\cos\theta = \frac{x-c}{r}$$

On élimine θ

$$1+e\cdot\cos\theta = \frac{a\left(1-e^2\right)}{r}$$

$$e\cdot\cos\theta = \frac{a\left(1-e^2\right)-r}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{a\left(1-e^2\right)-r}{er} = \frac{x-c}{r}$$

De la relation entre *a*, *b* et *e* l'ellipticité, on écrit

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \;\rightarrow\; \frac{b^2}{a^2} = 1-e^2$$

$$\frac{a\cdot\frac{b^2}{a^2}-r}{e} = x-c$$

En simplifiant

$$\frac{b^2}{a}-r = \left(x-a\cdot e\right)\cdot e$$

$$r = \frac{b^2}{a}+a\cdot e^2 - e\cdot x = \frac{b^2}{a}+a\cdot\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-e\cdot x$$

$$r = a-e\cdot x$$

On élève au carré les deux membres en remplaçant r par sa première expression

$$r^2 = \left(a-e\cdot x\right)^2$$

$$\left(x-c\right)^2 + y^2 = \left(a-e\cdot x\right)^2$$

$$x^2 + a^2\cdot e^2 - 2\cdot a\cdot e\cdot x + y^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot e\cdot x + e^2\cdot x^2$$

On simplifie et regroupe

$$x^2\cdot\left(1-e^2\right)+y^2 = a^2\cdot\left(1-e^2\right)$$

Mais l'on sait que

$$\left(1-e^2\right) = \frac{b^2}{a^2}$$

$$x^2\cdot\frac{b^2}{a^2}+y^2 = a^2\cdot\frac{b^2}{a^2} = b^2$$

en divisant par b^2

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1}$$