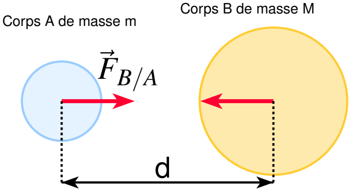
Gravitation
Sphere de Hill, limite de Roche...
Observatoire de Lyon

Stage Dafop
Sylvie Thiault

11 et 12 décembre 2018

1. Influence gravitationnelle : quelles conséquences à l'échelle des astres ?

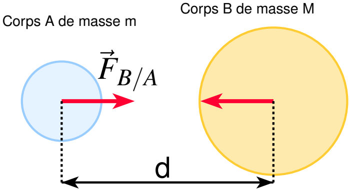


$$F_{B/A} = F_{A/B} = G\frac{Mm}{d^2}$$

Tout corps du Système solaire subit de la part des autres corps une attraction gravitationnelle.

Celle du Soleil est généralement prépondérante.

1. Influence gravitationnelle : quelles conséquences à l'échelle des astres ?

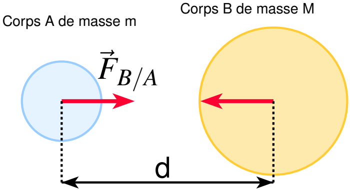


$$F_{B/A} = F_{A/B} = G\frac{Mm}{d^2}$$

Tout corps du Système solaire subit de la part des autres corps une attraction gravitationnelle.

Celle du Soleil est généralement prépondérante.
Mais lorsque un petit corps s'approche d'une planète, l'action de de la planète peut devenir prépondérante.

1. Influence gravitationnelle : quelles conséquences à l'échelle des astres ?



$$F_{B/A} = F_{A/B} = G\frac{Mm}{d^2}$$

Tout corps du Système solaire subit de la part des autres corps une attraction gravitationnelle.

Celle du Soleil est généralement prépondérante.
Mais lorsque un petit corps s'approche d'une planète, l'action de de la planète peut devenir prépondérante.
D'autres phénomènes peuvent intervenir comme la pression de radiation, l'effet Yarkovski...
Effet de fronde gravitationnelle.
Dans les cas plus extrêmes le corps peut se déformer, voir se disloquer.

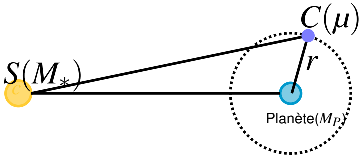
2. Les équations du problème.

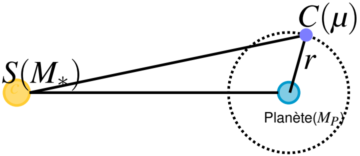
Quand l'influence gravitationnelle d'un astre devient prépondérante

On considère une planète de masse M_P en orbite à une distance d autour d'une étoile de masse M_* .

On considère un petit corps de masse μ à une distance r de la planète , avec $\mu \ll m$.

On peut considérer que la distance de l'étoile au petit corps est égale à la distance de l'étoile à la planète.





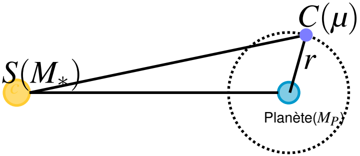
Force gravitationnelle exercée par l'étoile sur le petit corps :

$$F_* = \mathcal{G}\frac{M_*\mu}{d^2}$$

Force gravitationnelle exercée par la planète sur le petit corps :

$$F_P = \mathcal{G}\frac{M_P\mu}{r^2}$$

La zone d'influence de la planète est la sphère centrée sur la planète dont le rayon ρ vérifie :$F_* = F_P$



Force gravitationnelle exercée par l'étoile sur le petit corps :

$$F_* = \mathcal{G}\frac{M_*\mu}{d^2}$$

Force gravitationnelle exercée par la planète sur le petit corps :

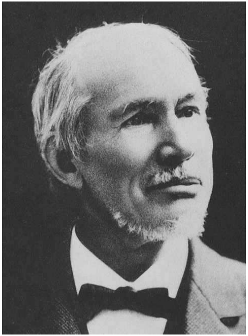
$$F_P = \mathcal{G}\frac{M_P\mu}{r^2}$$

La zone d'influence de la planète est la sphère centrée sur la planète dont le rayon ρ vérifie :$F_* = F_P$

$$\boxed{\rho = d\sqrt{\frac{M_P}{M_*}}}$$

2. Les équations du problème.

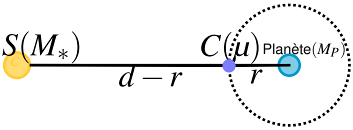
Qui est Hill ?



George William Hill (1838-1914)
Mathématicien, astronome américain.
Recherches sur le problème des “trois corps”, puis des N-corps.
Etude des mouvements de la Lune
Détermination des orbites des planètes du système solaire.
Scientifique reconnu à son époque
Une équation différentielle du second ordre porte son nom.

2. Les équations du problème.

Une autre approche

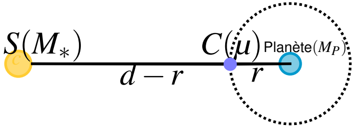


P, planète de masse m en orbite à une distance d et à une vitesse angulaire ω autour d'une étoile de masse M_*.

Si on suppose P animée d'un mouvement circulaire uniforme, l'équilibre des forces donne :

$$(1) : M_P\omega^2 d = \mathcal{G}\frac{M_P M_*}{d^2} \iff \omega^2 = \mathcal{G}\frac{M_*}{d^3}$$

On considère un satellite de masse μ en orbite autour de la planète , avec $\mu \ll m$.



Le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'étoile, de même vitesse angulaire ω que la planète. Il subit à la fois l'influence gravitationnelle de l'étoile à la distance $d-r$ avec $r \ll d$ et celle de la planète à la distance r.

L'équilibre des forces se traduit par :

$$(2) : \mu\omega^2(d-r) = \mathcal{G}\frac{\mu M_*}{(d-r)^2} - \mathcal{G}\frac{\mu M_P}{r^2} \iff M_*\frac{d-r}{d^3} = \frac{M_*}{(d-r)^2} - \frac{M_P}{r^2}.$$

$$M_* \frac{d-r}{d^3} = \frac{M_*}{(d-r)^2} - \frac{M_P}{r^2} \iff M_* \frac{(d-r)^3}{d^3} = M_* - M_P \frac{(d-r)^2}{r^2} (1)$$

$$\begin{aligned}
(1) \iff & M_* r^2 (d-r)^3 = M_* r^2 d^3 - M_P d^3 (d-r)^2 \\
\iff & M_* r^2 (-3d^2 r + 3dr^2 - r^3) = -M_P d^3 (d^2 - 2dr + r^2) \\
\iff & M_* r^3 (-3d^2 + 3dr - r^2) = M_P d^3 (d^2 - 2dr + r^2) \\
\iff & \frac{r^3}{d^3} = \frac{M_P}{M_*} \frac{d^2 - 2dr + r^2}{3d^2 - 3dr + r^2}
\end{aligned}$$

Et comme $r \ll d$,

$$M_* \frac{d-r}{d^3} = \frac{M_*}{(d-r)^2} - \frac{M_P}{r^2} \iff M_* \frac{(d-r)^3}{d^3} = M_* - M_P \frac{(d-r)^2}{r^2} (1)$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad M_* r^2 (d-r)^3 = M_* r^2 d^3 - M_P d^3 (d-r)^2 \\
&\iff \quad M_* r^2 (-3d^2 r + 3dr^2 - r^3) = -M_P d^3 (d^2 - 2dr + r^2) \\
&\iff \quad M_* r^3 (-3d^2 + 3dr - r^2) = M_P d^3 (d^2 - 2dr + r^2) \\
&\iff \quad \frac{r^3}{d^3} = \frac{M_P}{M_*} \frac{d^2 - 2dr + r^2}{3d^2 - 3dr + r^2}
\end{aligned}$$

Et comme $r \ll d$, on a finalement : $\dfrac{r^3}{d^3} = \dfrac{M_P}{3M_*}$ ou encore :

$$\boxed{r_{Hill} = d \sqrt[3]{\frac{M_P}{3M_*}}}.$$

3. Construction et calculs avec Geogebra

La tâche

Pour chacune des planètes (de Mercure à Saturne), estimer la distance à laquelle une planète devient concurrentielle par rapport au Soleil et tracer ces zones d'influence à l'échelle.

Pour chacune des planètes (de Mercure à Saturne), estimer le rayon de Hill et visualiser la sphère de Hill.

3. Construction et calculs avec Geogebra

Les données

Sous Geogebra, la représentation se fera en 2D et la sphère sera remplacée par un cercle.
L'unité de distance choisie sera le millier de km : 1 unité geogebra = 1000 kilomètres
Les données sur le Soleil et les planètes sont dans le fichier de départ zig_data.ggb.

3. Construction et calculs avec Geogebra

Les données

Fenêtre	Données	Objets	Unités
Tableur	Données planètes	C3 :C8 demi-grands axes I3 :I8 masses J3 :J8 rayons	unités astron kilogrammes mètres
Algèbre	Données Soleil l'unité astronomique Séquences	MS : masse du Soleil RS : rayon du Soleil ua : unité astronomique Planetes : noms des planètes Axes : demi-grands axes Mplanetes : masses planètes Rplanetes : rayon des planètes	kilogrammes mètres kilomètres mètres kilogrammes mètres
Graphique	Curseur index	ipla	1, 2,... , 6

3. Construction et calculs avec Geogebra

Au travail avec Geogebra

voir sur votre feuille

4. La limite de Roche

Qui est Roche ?

image : Académie des Sciences.

Édouard Albert Roche (1820-1883) mathématicien et astronome français, aussi méteorologue.

Ses travaux essentiels :

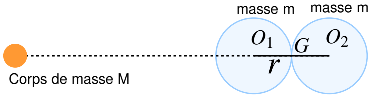
la stabilité d'un corps homogène en rotation soumis à l'influence des effets de marée causés par un autre corps ;

la géométrie du champ gravitationnel d'un système formé par deux corps.

4. La limite de Roche

les équations du problème

On va considérer un petit corps en train d'être déformé sous l'effet des forces de marée.



On le modélise par un système de deux sphères de même rayon r et de même masse m, et dont les centres sont alignés avec le corps central de masse M.

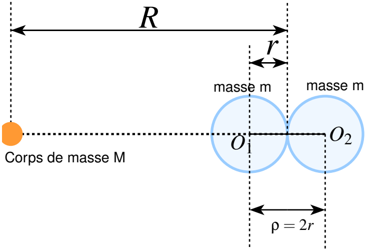
Le point de contact des deux boules est le centre d'inertie de ce système.

Les deux sphères sont soumises chacune à une force gravitationnelle :

$$F = \mathcal{G}\frac{m^2}{4r^2}$$

4. La limite de Roche

les équations du problème



Le corps central de masse M est situé à la distance R du centre d'inertie du système.

La différence entre les forces gravitationnelles dûes au corps central qui s'exercent sur chaque partie 1 et 2 du petit corps est

$$\Delta F = F_1 - F_2 = \mathcal{G}\frac{Mm}{(R-r)^2} - \mathcal{G}\frac{Mm}{(R+r)^2}.$$

4. La limite de Roche

les équations du problème

On cherche à quelle distance R, on a $\Delta F = F$. Cette distance est la **limite de Roche**.

Si le petit corps se rapproche à une distance inférieure à R, il risque de se disloquer !

$$\Delta F = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}\right)$$

4. La limite de Roche

les équations du problème

On considère que : $r \ll R$, alors

$$\Delta F = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\left(1+2\frac{r}{R}\right) - \left(1-2\frac{r}{R}\right) = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2} \times \frac{4r}{R} = 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3}.$$

$\Delta F = F \iff 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3} = \mathcal{G}\frac{m^2}{4r^2}$.Et finalement : $\frac{R^3}{r^3} = 16\frac{M}{m}$.

4. La limite de Roche

les équations du problème

On considère que : $r \ll R$, alors

$$\Delta F = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\left(1+2\frac{r}{R}\right)-\left(1-2\frac{r}{R}\right) = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\times\frac{4r}{R} = 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3}.$$

$\Delta F = F \iff 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3} = \mathcal{G}\frac{m^2}{4r^2}$.Et finalement : $\frac{R^3}{r^3} = 16\frac{M}{m}$.

Le système modélisant un corps de rayon $\rho = 2r$ et de masse $\mu = 2m$, on a :

4. La limite de Roche

les équations du problème

On considère que : $r \ll R$, alors

$$\Delta F = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\left(1+2\frac{r}{R}\right) - \left(1-2\frac{r}{R}\right) = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2} \times \frac{4r}{R} = 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3}.$$

$\Delta F = F \iff 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3} = \mathcal{G}\frac{m^2}{4r^2}$.Et finalement : $\frac{R^3}{r^3} = 16\frac{M}{m}$.

Le système modélisant un corps de rayon $\rho = 2r$ et de masse $\mu = 2m$, on a :

$$\boxed{R = \rho\sqrt[3]{4\frac{M}{\mu}}}$$

4. La limite de Roche

les équations du problème

On considère que : $r \ll R$, alors

$$\Delta F = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\left(1+2\frac{r}{R}\right)-\left(1-2\frac{r}{R}\right) = \mathcal{G}\frac{Mm}{R^2}\times\frac{4r}{R} = 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3}.$$

$\Delta F = F \iff 4\mathcal{G}\frac{Mmr}{R^3} = \mathcal{G}\frac{m^2}{4r^2}$.Et finalement : $\frac{R^3}{r^3} = 16\frac{M}{m}$.

Le système modélisant un corps de rayon $\rho = 2r$ et de masse $\mu = 2m$, on a :

$$\boxed{R = \rho\sqrt[3]{4\frac{M}{\mu}}}$$

4. La limite de Roche

Le cas de la comète Shoemaker-Levy 9

Découverte en 1992 par Carolyn Shoemaker, Eugene Shoemaker et David Levy au téléscope du mont Palomar.
C'est leur neuvième découverte de comète...
Forme est très inhabituelle : comète dans la sphère de Hill de Jupiter.
Désintégrée en s'approchant trop près de Jupiter.
En juillet 1994, crash en direct (ou presque) de la comète sur Jupiter

4. La limite de Roche

Le cas de la comète Shoemaker-Levy 9

Données sur la comète :
densité : $0,5 g/cm^3$, diamètre :$1,4$km.
Masse de Jupiter : $1,9 \times 10^{27}$ kg.