Gravitation
Orbite keplerienne
Observatoire de Lyon

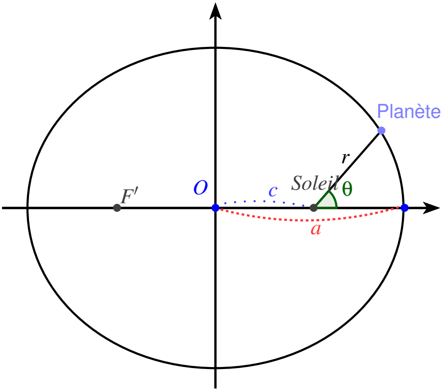
Stage Dafop
Sylvie Thiault

11 et 12 décembre 2018

1. Les lois de Kepler : rappels !

1ère Loi

Les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

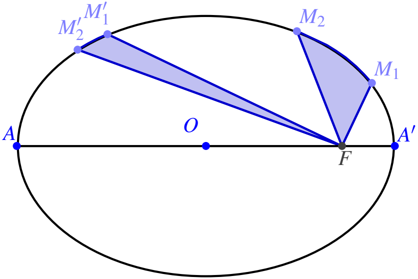


1. Les lois de Kepler : rappels !

2ème Loi

Le rayon Soleil-Planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

$$\frac{dS}{dt} = \text{constante.}$$

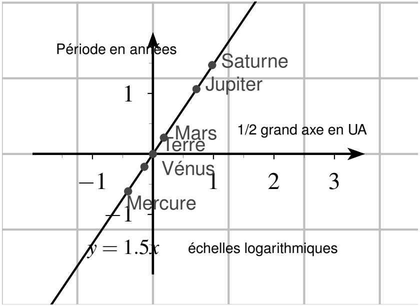


1. Les lois de Kepler : rappels !

3ème Loi

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \text{cste.}}$$



1. Les lois de Kepler : rappels !

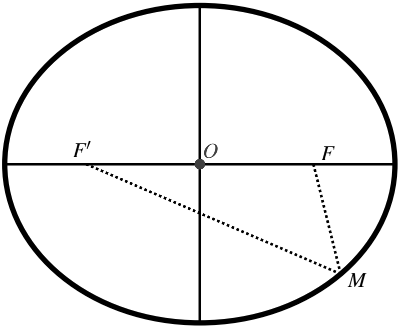
Votre mission...

- Représenter l'orbite d'une planète dont on connait l'excentricité.
- Représenter la planète en mouvement keplerien sur son orbite .

2. Construction de l'orbite

Petits rappels sur les ellipses

Une ellipse est un ensemble de points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.
Ces points sont les foyers F et F' de l'ellipse.



- Soit a un nombre réel positif.

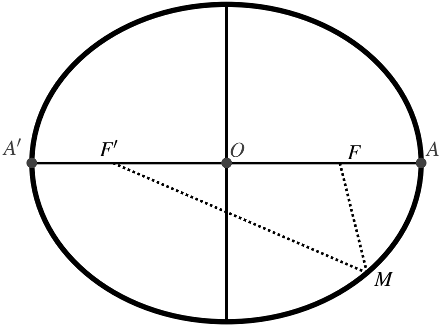
On a :

$$MF + MF' = 2a.$$

Soit O le milieu de $[FF']$.
OF = **distance focale**.
On la note OF=c.

2. Construction de l'orbite

Petits rappels sur les ellipses

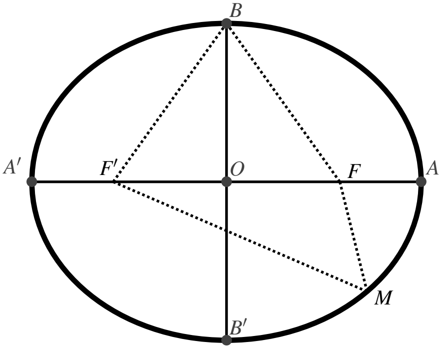


- A et A' , points de l'ellipse sur la droite (FF') .

Ils vérifient : $AF + AF' = A'F + A'F' = 2a$.
Donc $AA' = 2a$. a est la longueur du demi-grand axe.

2. Construction de l'orbite

Petits rappels sur les ellipses



- B et B', points de l'ellipse sur la perpendiculaire à (FF') en O.

B est tel que : $BF + BF' = 2a$, donc $BF = a$. De même : $BF' = a$.
D'après la propriété de Pythagore : $OB^2 + OF^2 = BF^2$. On pose $OB = b$ et on a :

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}.$$

2. Construction de l'orbite

Petits rappels sur les ellipses

- L'**excentricité** est le rapport :

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}.$$

On en déduit :

$$\boxed{b = a\sqrt{(1 - e^2)}}$$

2. Construction de l'orbite

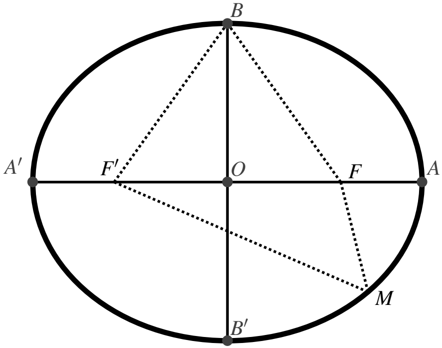
Petits rappels sur les ellipses

- L'**excentricité** est le rapport :

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}.$$

On en déduit :

$$\boxed{b = a\sqrt{(1 - e^2)}}$$



2. Construction de l'orbite

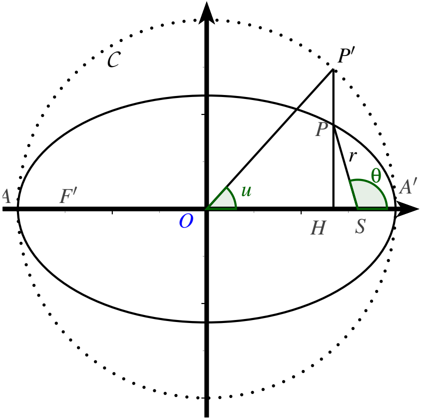
Ouvrir Geogebra 2D...

A suivre sur votre feuille...

3. Mouvement Keplerien

L'équation de Kepler et un peu de définitions

P est une planète qui orbite sur l'ellipse de centre O de demi grand axe a et d'excentricité e.



$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon a.

P' est le point de $\mathcal{C}$ qui a la même abscisse .

P' a donc la même période T que la planète P.

L'**anomalie excentrique** est l'angle $u = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OP'})$.

3. Mouvement Keplerien

L'équation de Kepler et un peu de définitions

Le temps est la variable de base de notre simulation.
Avec Geogebra, créer un curseur **tps** :
min=0 ; max=2000, incrément de 1.
Par définition, l'**anomalie moyenne** M (exprimée en degré) varie proportionnellement au temps :

$$M = \frac{360}{T} \times tps$$

Calcul de l'anomalie moyenne M avec GeoGebra :
taper dans la fenêtre de **Saisie** : **M = 360° / T $*$ tps**
On montre que l'anomalie excentrique est la solution de l'équation de Kepler :

$$\boxed{(1)\ u - e\sin u = M}$$

où u et M sont exprimées en radians.

3. Mouvement Keplerien

L'équation de Kepler et un peu de définitions

On note θ l'angle de la position de la planète sur son orbite. On a
$\theta = (\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SP})$

On montre que :

$$\boxed{(2)\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\boxed{(3)\ \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}$$

où ρ est la distance de la planète au Soleil.

Donc si on trouve u, on calcule θ.Et si on a θ, on pourra calculer ρ ...

3. Mouvement Keplerien

L'équation de Kepler et un peu de définitions

On note θ l'angle de la position de la planète sur son orbite. On a
$\theta = (\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SP})$

On montre que :

$$\boxed{(2)\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\boxed{(3)\ \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}$$

où ρ est la distance de la planète au Soleil.

Donc si on trouve u, on calcule θ.Et si on a θ, on pourra calculer ρ ...
Donc on saura où placer la planète sur son orbite !

3. Mouvement Keplerien

L'équation de Kepler et un peu de définitions

On note θ l'angle de la position de la planète sur son orbite. On a $\theta = (\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SP})$

On montre que :

$$\boxed{(2)\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\boxed{(3)\ \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}$$

où ρ est la distance de la planète au Soleil.

Donc si on trouve u, on calcule θ.Et si on a θ, on pourra calculer ρ ...
Donc on saura où placer la planète sur son orbite !
Mais comment trouver u ?

3. Mouvement Keplerien

L'équation de Kepler et un peu de définitions

On note θ l'angle de la position de la planète sur son orbite. On a $\theta = (\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SP})$

On montre que :

$$\boxed{\text{(2) } \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\boxed{\text{(3) } \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}$$

où ρ est la distance de la planète au Soleil.

Donc si on trouve u, on calcule θ.Et si on a θ, on pourra calculer ρ ...
Donc on saura où placer la planète sur son orbite !
Mais comment trouver u ?

3. Mouvement Keplerien

La solution de l'équation de Kepler vue comme l'abscisse du point d'intersection de deux courbes élémentaires

$$u - e\sin u = M \iff u - M = e\sin u.$$

La solution de cette équation est l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = x - M$ et de la courbe d'équation $y = e\sin x$.
Elle dépend de M donc du temps...

3. Mouvement Keplerien

L'astre en mouvement sur son orbite

la suite sur votre document papier...