MÉMOIRE
SUR
L'OBSERVATION DES LONGITUDES EN MER, PAR LE MOYEN DE LA LUNE.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE.

DANS le deſſein que j'ai de publier tout ce que mes expériences & mes réflexions m'ont fourni de connoiſſances, ſur la détermination des Longitudes en mer, par les obſervations de la Lune, objet qui mérite toute l'attention de l'Académie, j'ai cru en devoir compoſer deux diſcours. Dans l'un, qui m'a paru propre à être inſéré dans les Mémoires de l'Académie, ſi on l'en juge digne, j'expoſe aux Aſtronomes ce que la Théorie m'a pu fournir à cet égard de plus exact & de plus expéditif. J'y diſcute ce qui a été propoſé juſqu'ici ſur ce ſujet, & je démontre les conſtructions des Problèmes, ſur leſquels je fonde les pratiques de la Méthode que je crois devoir recommander aux Navigateurs, préférablement à toutes les autres.

Le ſecond diſcours, dreſſé en forme d'Inſtruction, eſt un ouvrage à part, dans lequel j'expoſe en détail ce que dans différentes circonſtances, un Marin, que je ſuppoſe peu inſtruit dans la Théorie, doit faire pour réuſſir dans la recherche de ſa longitude*. J'ai penſé que cette Inſtruction devoit être toute en explications de pratiques, ſans aucun mélange de diſcuſſion, ni de raiſonnement mathématique; mais que pourrois renvoyer le Lecteur, curieux de la Théorie, à mon premier Mémoire.

* *Voy. Expoſit. du Calcul aſtron. p. 173.*

PREMIÈRE PARTIE

Qui contient différentes Remarques générales ſur l'obſervation des Longitudes en mer, par le moyen de la Lune.

Il y a déjà long-temps que l'on eſt convaincu que l'Aſtronomie ne pouvoit offrir aux Navigateurs d'autres moyens de déterminer leur longitude, qu'en y employant des obſervations de la Lune, comparées aux calculs de ſes mouvemens.

Voici l'idée générale de cette Méthode. Le mouvement propre de la Lune, pendant les vingt-quatre heures d'un jour moyen, eſt un arc de grand cercle de $13^d\ 10'\ 35''$, en prenant un milieu entre ſa plus grande & ſa plus petite quantité. Par le calcul des Tables de la Lune, on peut déterminer les deux points du ciel où aboutiſſent les extrémités de l'arc que la Lune doit décrire, depuis un inſtant de midi, compté ſous le Méridien pour lequel les Tables ont été conſtruites, juſqu'au midi du jour ſuivant, un Navigateur peut obſerver en quel point de cet arc la Lune eſt placée, à un inſtant compté ſous le Méridien inconnu, où il ſe trouve actuellement. Il peut donc ſavoir, en comparant ſon obſervation au calcul, quelle portion de l'arc de ſon mouvement diurne la Lune a parcourue à cet inſtant. Ainſi, en ſuppoſant les mouvemens de la Lune uniformes, cet arc entier eſt à la portion meſurée par le Navigateur, comme vingt-quatre heures, ſont au temps vrai que l'on comptoit ſous le Méridien des Tables, à l'inſtant où le Navigateur obſervoit la Lune; ce temps vrai comparé avec celui que le Navigateur comptoit à cet inſtant, donne la différence entre ſon Méridien, & celui pour lequel les Tables ont été conſtruites.

L'arc du mouvement diurne de la Lune, qui eſt renfermé entre les limites de 11 & de 15 degrés, répond donc aux 360 degrés de longitude; d'où l'on voit que la petiteſſe de cet arc eſt cauſe que les moindres erreurs commiſes dans les obſervations de la Lune, faites par le Navigateur, & dans les calculs des Tables, doivent produire des erreurs environ vingt-huit fois plus grandes dans la détermination des Longitudes; de ſorte que la ſeule méthode que l'Aſtronomie puiſſe fournir, ſeroit une foible reſſource pour les Marins, ſi on ne leur indiquoit des moyens ſûrs de mettre une préciſion ſuffiſante dans leurs obſervations, & ſi on ne leur donnoit des calculs, ou des Tables de la Lune, qui ſoient de la dernière exactitude.

Avant que de mettre cette méthode en pratique, il falloit donc

donc que les Aſtronomes fuſſent aſſurés d'avoir de bonnes Tables des mouvemens de la Lune; mais d'un côté celles qui ont été publiées ſur des hypothèſes purement géométriques, & indépendantes du ſyſtème de la gravitation univerſelle, ſont ſi peu d'accord entr'elles & avec le ciel, qu'elles ſont abſolument inſuffiſantes pour ſervir à une recherche auſſi délicate que celles des Longitudes: d'un autre côté les premiers eſſais de l'application de ce ce ſyſtème aux mouvemens de la Lune, avoient fait ſentir de ſi grandes difficultés à en conſtruire des Tables uniquement fondées ſur ce principe, qui paroît être le ſeul ſur lequel on puiſſe établir des Théories exactes, qu'il n'y avoit guère d'apparence qu'on y pût réuſſir de long-temps.

Dans cet embarras, M. Halley, le plus inſtruit des Aſtronomes de ſon temps, & auſſi zélé pour l'avantage de la Navigation, que pour la gloire de ſa Nation, avoit pris un parti, qu'on peut bien regarder comme la dernière reſſource d'une cauſe preſque déſeſpérée. Sachant donc que l'on ne pourroit jamais déterminer les Longitudes ſur mer, ſi l'on n'avoit avant tout des calculs ſûrs des mouvemens de la Lune, & ſentant la difficulté preſque inſurmontable de les avoir par une méthode directe, il crut devoir y ſuppléer en introduiſant l'uſage de certaines *Équations empiriques*, déterminées par les différences entre les vrais lieux de la Lune, obſervés à terre avec tout le ſoin poſſible, & les lieux calculés ſur les meilleures Tables. Ces différences, ou erreurs des Tables, devoient être périodiques, & revenir ſenſiblement dans le même ordre & de la même quantité au bout de dix-huit ans dix ou onze jours; cette période miſe autrefois en uſage par les Chaldéens, pour prédire le retour des éclipſes, a été appelée *Saros*. Cette idée de M. Halley (à l'exécution de laquelle il a travaillé ſans relâche pendant les vingt dernières années de ſa vie) eſt aſſez connue des Aſtronomes: elle étoit excellente dans l'hypothèſe de M. Halley; mais aujourd'hui que la Théorie de la Lune eſt un problème réſolu, l'uſage du *ſaros* eſt devenu auſſi inutile qu'incommode, dans la recherche des Longitudes, principalement à cauſe des inconvéniens auxquels cette méthode eſt ſujette.

1.° La période ſur laquelle eſt fondé le retour des mêmes équations empiriques, ne rétablit pas aſſez exactement les élémens du calcul de la Lune; car ſans parler du mouvement de l'apogée du Soleil, la révolution annuelle de cet Aſtre exigeroit que le *ſaros* fût de dix-huit ans & un demi-jour; le mouvement de la Lune en longitude, qu'il fût de dix-huit ans dix jours $\frac{1}{2}$; celui de ſon apogée, qu'il fût de dix-ſept ans & deux cents cinquante-quatre jours; celui de ſon nœud, qu'il fût de dix-huit ans & deux cents vingt-quatre jours. Par ce défaut d'accord, la combinaiſon des erreurs particulières qui répondent à chacun de ces élémens, varie à chaque retour, & par-là, non-ſeulement elle oblige l'Aſtronome à recommencer ſans ceſſe ſes périodes d'obſervations, & ſes regiſtres d'équations empiriques; mais il eſt encore évident, qu'elle ne peut donner des corrections fort préciſes.

2.° Cette méthode d'employer les calculs de la Lune, rectifiés par ces équations, ſuppoſe un trop grand nombre d'opérations faites ſans erreurs; (on a vu que dans la recherche des Longitudes, la moindre erreur d'obſervation ou de calcul, eſt d'une extrême conſéquence) car pour chaque poſition rectifiée de la Lune, il faut une obſervation correſpondante faite ſans erreur dans la période précédente, il faut un calcul exact de toutes les réductions de cette obſervation, il faut un calcul du lieu de la Lune ſelon les Tables aſtronomiques, pour en avoir l'erreur par la comparaiſon de l'obſervation au calcul; il faut enfin un calcul de la poſition de la Lune dont on a beſoin pour la rectifier (à peu près) par l'erreur trouvée précédemment. Or quoiqu'il ne ſoit pas fort difficile de rectifier de cette manière le calcul d'une éclipſe de Soleil ou de Lune, ce ſeroit un travail immenſe (quand même il ſeroit toujours poſſible) que de l'entreprendre pour faire des Tables des vrais lieux de la Lune ainſi corrigés ou rectifiés, pour tous les jours de l'année, comme il eſt néceſſaire d'en avoir pour la recherche des Longitudes ſur mer.

3.° Cette méthode aſſerviroit les Aſtronomes à faire toujours uſage de l'unique ſorte de Tables, à laquelle l'Obſervateur de la période auroit comparé ſes obſervations; ces Tables peuvent n'être pas dreſſées d'une manière aſſez ſûre ni aſſez commode pour le calcul, & elles deviendront ſûrement d'autant plus mauvaiſes que l'Aſtronomie ſe perfectionnera davantage.

4.° Il s'en faut de beaucoup que dans nos climats un même Obſervateur puiſſe déterminer les lieux de la Lune aſſez ſouvent, pour avoir une quantité ſuffiſante de corrections empiriques pendant une période, puiſqu'il arrive fort communément qu'il ſe paſſe des ſemaines entières ſans qu'on puiſſe voir la Lune dans le Méridien; ainſi, quand même il n'y auroit pas d'autre moyen d'avoir des calculs exacts de la Lune, que de les rectifier par cette méthode, il eſt évident que le *ſaros* ne pourroit être ſuffiſamment rempli que dans un pays où le Ciel eſt auſſi clair que dans celui des Chaldéens; mais que dans ce pays-ci on peut le comparer au tonneau des Danaïdes, qu'on prétendroit remplir en y verſant de temps en temps un peu d'eau.

Aujourd'hui donc, que grâces aux recherches profondes des Géomètres, & ſur-tout aux travaux infatigables de M. Clairaut, nous ſommes aſſurés de tenir la vraie loi des mouvemens de la Lune, & qu'il ne tient preſque plus à rien que nous n'en ayons d'excellentes Tables; tout cet appareil de périodes ou de *ſaros* eſt devenu un échafaudage inutile, & nous pouvons avancer hardiment que les calculs de la Lune ne forment plus d'obſtacle à la détermination des Longitudes ſur mer.

Dans cette confiance, nous pouvons nous occuper dès-à-préſent à chercher les moyens les plus ſimples de faire uſage de ces calculs, & tâcher de mettre la pratique des Longitudes à la portée des Navigateurs ordinaires; c'eſt le but que je me propoſe ici, pour contribuer en quelque choſe au bien général qui en doit réſulter; la connoiſſance que j'ai de ce qui peut s'exécuter en Mer, & celle de quelques reſſources de calcul, donneront peut-être une ſorte de mérite à ce travail.

REMARQUES sur la préciſion des meſures abſolues des arcs céleſtes, faites en mer avec le quartier de réflexion.

Pour réuſſir dans la détermination des Longitudes, il ne ſuffit pas, comme je l'ai fait voir au commencement de ce diſcours, d'avoir des calculs exacts des mouvemens de la Lune, il faut encore qu'un Navigateur puiſſe meſurer avec une grande préciſion les arcs qu'elle parcourt dans le Ciel, & l'on peut dire que c'eſt-là la plus grande difficulté.

Pendant plus de huit mois que j'ai reſté en mer, dans les années 1750, 1751, 1753 & 1754, j'ai fait un très-grand nombre d'expériences avec pluſieurs inſtrumens de différentes conſtructions, faits les uns en France, & les autres en Angleterre, pour m'aſſurer de la préciſion ſur laquelle on pouvoit compter dans la meſure abſolue d'un arc céleſte, & j'en ai réduit le réſultat à cette propoſition: *Par une ſeule obſervation faite avec tout le ſoin poſſible, à l'aide d'un bon quartier de réflexion de 20 pouces de rayon, on ne peut répondre de la quantité abſolue d'un arc celeſte, qu'à 4 minutes près* *.

En effet, ſi on examine ſans préjugé toutes les circonſtances qui entrent néceſſairement dans les obſervations faites en mer, on en conclura aiſément que cette propoſition n'a rien d'étonnant.

Je ſuppoſe un quartier de réflexion de 20 pouces de rayon (ils n'en ont ordinairement que 16 à 18); on ſait qu'à cauſe de la réflexion des miroirs, les diviſions de cet inſtrument ne ſont proprement que celles d'un cercle de 10 pouces de rayon: or dans un tel cercle, l'arc d'une minute répond à $\frac{1}{29}$ de ligne, quantité à peine ſenſible à la vue ſimple, & qui par conſéquent peut ſe trouver en excès ou en défaut dans pluſieurs des diviſions du meilleur inſtrument lorſqu'elles ſont marquées, non par des points, mais par des traits qui, pour être viſibles ſur un inſtrument de mer, ne peuvent être d'une fineſſe extrême; ainſi 1.° on peut être trompé d'une minute, par l'erreur de quelqu'une des diviſions de l'inſtrument.

2.° En eſtimant la coïncidence du trait de l'alidade qui ſert d'index, avec le trait qui marque une diviſion de l'inſtrument, on ne peut pas répondre de ne ſe point tromper de $\frac{1}{58}$ de ligne qui vaut une demi-minute; on doit donc ſe méfier d'une demi-minute d'erreur dans une pareille eſtime, ſoit en vérifiant le paralléliſme & la diſpoſition reſpective des miroirs, ſoit en comptant ſur le limbe de l'inſtrument, à l'aide de la diviſion de *nonnius*, les degrés & minutes d'un arc meſuré.

3.° En ſe ſervant d'une lunette qui ne peut agrandir plus de trois fois les diamètres des objets, ſans être trop incommode, un arc d'une minute paroît ſi petit dans le ciel, & le mouvement continuel du Vaiſſeau, triplé par l'effet de la lunette, permet ſi peu de donner toute l'attention néceſſaire, qu'il n'eſt pas poſſible de s'aſſurer d'avoir évité l'erreur d'une minute dans le concours des deux images qu'on réunit, ſoit en vérifiant le paralléliſme des miroirs, ſoit en meſurant l'arc céleſte dont on a beſoin.

Voilà donc cinq ſources d'erreurs, dont la ſomme eſt de 4 minutes, dont il eſt impoſſible que le plus habile obſervateur ſe flatte de s'être garanti, s'il ne veut ſe faire illuſion à lui-même, ou aux autres: or c'eſt un principe inconteſtable qu'on ne doit ſe conduire en mer, d'après le réſultat d'une opération, que lorſqu'on a apprécié toutes les erreurs commiſſibles, pour ſe défier de la ſomme de leurs effets; on ne doit ainſi compter que ſur 4 minutes de préciſion, dans la meſure abſolue d'un arc céleſte.

L'uſage des loupes, pour agrandir les intervalles apparens des diviſions du limbe d'un inſtrument, qui eſt ſi propre ſur terre à diminuer les erreurs dans les eſtimes, eſt dangereux ſur mer, par la conſtruction actuelle des quartiers de réflexions; car comme l'étendue de la diviſion de *nonnius* ne permet pas de fixer une loupe ſur l'alidade, laquelle n'eſt arrêtée ſur le limbe de l'inſtrument que par un léger frottement; il eſt à craindre que par le mouvement du Vaiſſeau, la loupe ne

* Cette propoſition doit être beaucoup reſtreinte; ſi la Chaire marine de M. Irwin a lieu, on pourra alors compter ſur environ 2 minutes.

choque & ne dérange l'alidade, à moins qu'elle ne soit fixée par une vis de rappel, exempte de tout jeu d'engrénage, & même dans ce cas, une loupe ne pourroit servir qu'à diminuer un peu l'incertitude des deux estimes de la correspondance de l'index de l'alidade, avec les divisions du limbe, incertitude que nous avons supposée de $\frac{1}{58}$ de ligne à la vue simple, & qu'on ne peut taxer d'exagération.

Après tout, dire qu'un observateur peut se tromper de 4 minutes dans chacune des mesures absolues des arcs qu'il fait sur mer, à l'aide d'un octant, est-ce dire autre chose, sinon qu'il peut y avoir $\frac{1}{7}$ de ligne d'erreur dans le résultat de quatre opérations différentes, faites sur un plancher irrégulièrement mobile, avec un instrument divisé par un ouvrier, qui ne peut être qu'un homme; résultat qui dépend de la réunion de toutes ces quatre opérations, & non d'un milieu pris entre chacune?

Si ceux qui promettent une si grande précision dans les méthodes qu'ils proposent, avoient fait de longues routes sur mer, & examiné ce qui se passe dans l'observation la plus facile de toutes, & à laquelle les marins sont le plus exercés, je veux dire, celle de la hauteur méridienne du Soleil; ils auroient remarqué souvent, que deux bons observateurs, munis d'excellens quartiers de réflexion bien rectifiés, diffèrent entr'eux de 5, 6 ou 7 minutes, lorsqu'ils observent chacun à part, & que dans le cours des hauteurs qu'ils prennent aux environs de midi, pour avoir la plus grande, ils ne se communiquent pas à chaque instant, celle que leur instrument leur indique; car quand ils le font, comme c'est l'ordinaire, les observateurs qui diffèrent entr'eux, sont disposés à croire qu'en effet ils pèchent un peu, l'un par excès, l'autre par défaut; de sorte qu'ils se rapprochent, & comme une minute ou deux sont à peine sensibles sur leurs quartiers, lorsque midi est passé, ils semblent s'accorder parfaitement sur la plus grande hauteur, ou ne différer entr'eux que d'une ou deux minutes. On ne peut donc disconvenir, que dans les plus beaux temps, dans les plus belles mers, la hauteur méridienne du Soleil déterminée par un seul observateur, avec un excellent instrument,

n'est jamais sûre qu'à 3 minutes ou environ: elle ne le seroit qu'à 4 ou 5 minutes près, si elle ne résultoit que d'une seule hauteur prise dans un instant, & sans y regarder à plusieurs fois, comme on a le temps de le faire à midi.

Je sais bien que de ce qu'il est possible qu'un observateur habile se trompe dans quelque détermination, il ne s'ensuit pas qu'il se trompe nécessairement; je sais encore que parmi les combinaisons possibles des cinq sources d'erreurs que j'ai détaillées, il y en a un très-grand nombre, où leur effet se réduit presque à rien, par leur compensation: je sais enfin qu'il y a un moyen assez sûr de détruire une partie de l'effet des erreurs commissibles dans les observations, savoir, en les recommençant à plusieurs reprises, & en prenant un milieu entre leurs différens résultats. J'avoue que par ces trois raisons, un observateur doit toujours se rassurer, & être moins inquiet sur la certitude de ses opérations; aussi n'insisté-je sur le peu de précision des observations faites en mer, que pour restreindre le trop de confiance que nous sommes naturellement portés de donner aux mesures que nous avons prises, & pour faire entendre combien on doit se défier de ceux qui prétendent faire des observations si exactes, avec l'instrument dont ils se servent. Je suis même tellement convaincu, par le grand nombre d'essais que j'en ai faits en mer, de l'utilité réelle des observations des Longitudes par la Lune, dans les voyages de long cours, que je crois qu'on ne sauroit trop engager les Navigateurs à s'y appliquer, ni employer trop de moyens pour leur en faciliter l'usage. Ceux qui vont aux Indes orientales savent aussi très-bien, qu'il leur seroit souvent d'une extrême importance, de connoître leur Longitude à quarante lieues près, quelque grossière que cette détermination paroisse.

REMARQUES sur le choix des Méthodes propres à déterminer les Longitudes sur mer.

Les erreurs dont les observations faites en mer sont susceptibles, jointes au peu de vîtesse de la Lune dans ses mouvemens, doivent nous conduire naturellement à ces réflexions. 1.° Qu'on ne peut être trop ſcrupuleux, ſoit en faiſant des obſervations, ſoit en les appliquant au calcul de la Longitude. 2.° Qu'on ne peut être trop attentif ſur le choix d'une méthode, par laquelle les erreurs commiſſibles dans les obſervations, influent le moins qu'il eſt poſſible ſur la détermination de la Longitude: c'eſt ſur quoi nous devons inſiſter dans ce Mémoire.

La bonté d'une méthode de pratique, fondée d'ailleurs ſur une théorie exacte, ne dépend pas du plus petit nombre d'opérations qu'elle exige, mais principalement du plus petit nombre d'obſervations qui aient beſoin d'une grande préciſion; ainſi tous les arcs meſurés dans le ciel avec le même inſtrument, étant ſuppoſés ſuſceptibles chacun d'une erreur égale, comme de 4 minutes, la meilleure de toutes les méthodes, & par conſéquent celle qu'on doit adopter par préférence, eſt celle qui n'exige eſſentiellement qu'une ſeule obſervation de cette eſpèce. Telle eſt celle que je me propoſe d'expliquer dans ce Mémoire.

On peut décider encore, par un principe qui eſt particulier à la recherche des Longitudes, quelle eſt la meilleure méthode qu'on y puiſſe employer; car, puiſque la détermination de la Longitude dépend uniquement de la comparaiſon d'une portion de l'arc du mouvement diurne de la Lune, meſurée par le Navigateur, avec cet arc entier, déterminé par le calcul, il eſt évident que la plus ſimple de toutes les méthodes eſt celle où l'on meſure immédiatement cette portion d'arc (c'eſt auſſi celle dont il s'agit ici); & que toutes les autres méthodes qu'on pourroit imaginer, qui ne feroient connoître cette portion d'arc que par le calcul de pluſieurs obſervations, ſujettes chacune à des erreurs auſſi grandes que celle à laquelle la meſure immédiate de cette portion peut être ſujette; toutes ces méthodes, dis-je, doivent être cenſées indirectes, défectueuſes & par conſéquent rejetées, quelque faciles qu'elles paroiſſent dans la pratique.

REMARQUES

REMARQUES ſur les principaux Écrits modernes, où l'on parle des Longitudes obſervables en mer, par le moyen de la Lune.

Parmi ceux qui ont écrit depuis quelques années ſur l'obſervation des Longitudes en mer, par le moyen des diſtances de la Lune au Soleil ou à quelqu'étoile, les uns l'ont ſurchargée de circonſtances inutiles, les autres lui ont attribué une facilité & une préciſion, dont elle eſt fort éloignée d'être ſuſceptible; on en doit attribuer la principale cauſe à leur peu d'expérience ſur ce qui eſt praticable en mer.

Les premiers ont dit qu'il falloit obſerver la diſtance de la Lune à deux étoiles différentes, dont la poſition dans le ciel fût bien établie par les Aſtronomes, afin d'avoir un triangle ſphérique, dont le calcul ſervît à déterminer la longitude & la latitude de la Lune, qu'on compareroit enſuite à celles qu'on auroit calculées ſur les meilleures Tables. Cette méthode, fort bonne dans la ſpéculation, eſt comme impoſſible dans la pratique, tant par la grande difficulté d'obſerver ſur mer, dans l'eſpace de quelques minutes de temps, la diſtance de la Lune à deux étoiles différentes, que par la longueur énorme & par la complication des calculs, que l'Obſervateur ſeroit obligé de faire avant que de conclure ſa longitude; calculs d'ailleurs qui exigeroient une connoiſſance approfondie de la Trigonométrie ſphérique; cette méthode, ſans être plus exacte que celle que je me propoſe d'expliquer, eſt donc capable de rebuter le Navigateur, & de lui faire perdre le fruit de ſon obſervation, dont il ne pourroit avoir le réſultat que fort long-temps après qu'elle auroit été faite; & il ne pourroit en être aſſuré qu'autant qu'il le ſeroit, qu'il n'auroit fait aucune erreur de calcul, aſſurance qu'on ne peut acquérir qu'après avoir refait tout ce calcul.

Un autre s'exprime ainſi: *Quand on obſerve en mer la diſtance de la Lune au Soleil ou aux Étoiles fixes, ſi l'on ſe ſert du nouveau quartier de réflexion, on ne s'aperçoit plus du mouvement* *du Vaiſſeau, & par conſéquent on peut déterminer mieux qu'à une minute près, par diverſes opérations réitérées, le vrai lieu de la Lune.* On lit encore dans un autre: que *le contact des diſques de deux aſtres, eſt par la nature du quartier de réflexion indépendant du mouvement du Vaiſſeau;* ce qui me paroît préſenter cette idée, que lorſqu'on eſt parvenu (en réuniſſant les images des deux aſtres dans le champ de la lunette) à diſpoſer l'alidade de ſorte qu'elle marque ſur le limbe l'arc de leur diſtance, ces images paroiſſent déſormais adhérentes, nonobſtant le mouvement du Vaiſſeau, pourvu que ce mouvement ne les faſſe pas ſortir du champ de la lunette: ſi ce n'eſt pas là ce que ces Auteurs ont entendu, j'avoue que je ne comprends rien dans ces expreſſions; mais ſi j'ai bien expoſé leur penſée, rien n'eſt moins exact, puiſque la réunion des images ne peut ſubſiſter, dès que le plan de l'inſtrument ceſſe de paſſer par l'œil & par les deux aſtres dont on obſerve la diſtance; or il eſt certain que le mouvement continuel du Vaiſſeau ne permet pas à l'Obſervateur, quelqu'exercé qu'il ſoit, de maintenir le plan de ſon inſtrument dans une même poſition pendant deux ou trois ſecondes de temps; de ſorte qu'on ne peut réellement ſaiſir qu'au vol la réunion des images des objets dont on obſerve la diſtance, & qu'on ne s'aſſure qu'elle eſt ſenſiblement exacte que lorſque par l'effet du mouvement oſcillatoire du Vaiſſeau, ou par celui d'un balancement procuré à l'inſtrument par l'Obſervateur, les deux images viennent à ſe toucher en paſſant l'une auprès de l'autre.

Ce qui a pu faire illuſion à ces Auteurs, c'eſt que lorſque l'on prend la hauteur méridienne du Soleil, le bord de ſon image paroît toujours toucher le bord de l'horizon de la mer, tant que le plan de l'inſtrument n'eſt pas fort éloigné de la ſituation verticale; il ſemble donc que cette réunion eſt indépendante du mouvement du Vaiſſeau, mais il eſt facile de s'en déſabuſer, en faiſant attention qu'à meſure que l'inſtrument participe du mouvement du Vaiſſeau, le point de contact du Soleil & de l'horizon change, & que leur réunion ne paroît conſtante, que parce que les diſtances du Soleil aux différens

points de l'horizon, qui ſont voiſins de ſon vertical, ſont d'autant plus ſenſiblement égales entr'elles, que le Soleil eſt plus élevé; cet accord ſeroit bien moins apparent, ſi l'inſtrument pouvoit faire diſtinguer une différence d'une minute dans ces diſtances.

REMARQUES *ſur la Méthode pour laquelle l'État du Ciel de M. Pingré avoit été principalement calculé.*

Pour engager les Navigateurs à obſerver en mer les Longitudes par le moyen de la Lune, M. Pingré, l'un de nos Académiciens, s'eſt donné la peine pendant quatre années de ſuite, de publier une eſpèce de Calendrier marin, intitulé l'*État du Ciel,* qui contient des calculs très-détaillés, & faits avec tout le ſoin poſſible, des mouvemens du Soleil & de la Lune; ſon zèle en cela étoit d'autant plus louable, qu'il n'étoit intéreſſé que par l'envie de faire le bien de la Navigation; mais la méthode principale pour laquelle il a dreſſé ſes Tables de calculs dans les trois dernières années, n'étoit que ſpécieuſe dans la théorie; il eût été très-dangereux qu'un Navigateur y eût mis quelque confiance: comme quelques perſonnes mieux intentionnées qu'éclairées pourroient ſouhaiter qu'on reprît ce travail, je me crois obligé d'entrer ici dans quelque détail, pour prouver ce que je viens d'avancer.

Voici en quoi conſiſtoit cette méthode: Il falloit obſerver la hauteur méridienne de la Lune, en marquant à une montre le temps de cette obſervation; par la hauteur du pôle, ſuppoſée connue, on en concluoit la déclinaiſon de la Lune; deux, trois ou quatre heures avant ou après le paſſage de la Lune au méridien, il en falloit obſerver une hauteur, en marquant à la même montre le moment de l'obſervation; par l'intervalle des temps marqués à la montre, & par les mouvemens de la Lune en déclinaiſon, tirés des calculs de M. Pingré, on avoit la déclinaiſon de la Lune au moment de la hauteur priſe hors du méridien; au défaut de l'obſervation de la hauteur méridienne, on pouvoit tirer directement cette déclinaiſon des calculs de l'*Etat du Ciel* (& c'étoit le meilleur parti dans tous les cas) ; alors on avoit les trois côtés d'un triangle ſphérique, formé par le pôle, le zenit de l'Obſervateur & la Lune ; en calculant l'angle au pôle, on avoit la diſtance de la Lune au méridien du Navigateur, pour le moment où la hauteur de la Lune avoit été priſe (ce moment devoit être connu d'ailleurs en temps vrai, par des obſervations particulières faites exprès, & à peu près ſelon les méthodes que nous donnerons dans la ſuite) ; enfin, en comparant cette diſtance au méridien, ou cet angle horaire de la Lune avec celui que les calculs de l'*État du Ciel* indiquoient pour le méridien de Paris, au même inſtant de temps vrai que celui de l'obſervation *, on trouvoit la différence des méridiens ou la longitude cherchée.

Cette méthode paroît extrêmement ſimple dans la théorie & encore plus dans la pratique, puiſqu'il ſemble que les obſervations eſſentielles ſe réduiſent à prendre une ou tout au plus deux hauteurs de la Lune ; mais pour peu qu'on l'examine, on verra facilement que la détermination de l'angle horaire de la Lune dépend de trop de quantités ſujettes à erreurs, dont l'influence eſt elle-même très-variable, puiſqu'elle dépend des circonſtances où ſe trouve la Lune à l'égard de l'équateur & du méridien, & de celles où ſe trouve l'Obſervateur ſur la ſurface de la Terre.

En effet, dans le triangle qui donne l'angle horaire de la Lune, l'un des côtés, qui eſt la diſtance de la Lune au pôle, dépend de deux obſervations, ſi on ne veut pas l'avoir par

* Au lieu de mettre dans l'*État du Ciel* les angles horaires de la Lune, il me ſemble qu'il eût mieux valu y mettre ſimplement ſon aſcenſion droite vraie, parce que l'angle horaire de la Lune étant donné par obſervation, on conclut facilement l'aſcenſion droite de la Lune qui en réſulte ; laquelle eſt égale au temps vrai de l'obſervation, réduit en degrés (à raiſon de 15 par heure) plus l'aſcenſion droite du Soleil à ce même temps, plus ou moins l'angle horaire de la Lune, ſelon qu'elle eſt à l'orient ou à l'occident ; ainſi en comparant cette aſcenſion droite avec celle qui auroit été marquée dans l'*État du Ciel* pour le même temps à Paris, on eût eu la différence des méridiens, d'une manière qui me paroît plus directe & plus facile à comprendre que celle qu'on a donnée dans ce livre, quoiqu'elle revienne après tout au même.

le calcul, il dépend de la hauteur méridienne de la Lune & de la hauteur du pôle : donc pour avoir les trois côtés de ce triangle, il faut quatre obſervations faites ou réduites avec toute la préciſion poſſible, ſavoir la hauteur du pôle & celle de la Lune au temps de ſon paſſage au méridien, la hauteur du pôle & celle de la Lune en un temps éloigné de deux heures au moins du paſſage au méridien. Or 1.° quand même on ſeroit certain d'avoir déterminé la hauteur du pôle à midi, à 2 minutes près, on ne pourroit cependant s'aſſurer de l'avoir qu'à 4 ou 5 minutes près, à quelqu'heure un peu éloignée de midi, à cauſe de l'incertitude des réductions qu'il y faut faire & qui ne ſont fondées que ſur l'eſtime vague de la dérive du Vaiſſeau, ſur celle de la longueur du chemin du Navire & ſur ſa direction obſervée à la bouſſole.

2.° Il s'en faut de beaucoup qu'on puiſſe obſerver ſur mer les hauteurs de la Lune avec quelqu'exactitude pendant la nuit, à moins que cette hauteur n'excède 60 degrés, ou ne ſoit au-deſſous de 20 : car la ſurface de la mer fait à l'égard de l'obſervateur l'effet d'un miroir inégal & mal poli, une traînée fort longue & fort large d'images de la Lune s'y peint dans le vertical de cet aſtre ; l'éclat de tous ces reflets efface tellement le terme de l'horizon de la mer, lequel n'eſt guère au delà, à moins que la Lune ne ſoit fort haute, qu'on ne peut le diſtinguer avec aſſez de certitude, & qu'ainſi on ne peut s'en ſervir pour prendre la hauteur de la Lune que par l'eſtime, ſuffiſante pour bien des recherches, mais trop groſſière pour celle dont il s'agit ; ces reflets lumineux ne viennent ſe terminer à l'horizon même, que lorſque la Lune eſt au-deſſous de 20 degrés, en ſuppoſant l'œil élevé de 15 à 20 pieds au-deſſus de la ſurface de la mer.

Il ſe préſente encore bien d'autres inconvéniens dans la pratique de cette méthode : car 1.° comme le calcul de la Longitude y eſt fondé ſur la différence des mouvemens du Soleil & de la Lune en aſcenſion droite, cette différence eſt en 24 heures toujours plus petite que n'eſt l'arc du mouvement diurne de la Lune ; elle n'eſt quelquefois pas de 9 degrés complets, tandis que celui-ci n'eſt jamais au-deſſous de 11 degrés: 2.° ſi l'on veut avoir tous les côtés de ſon triangle par obſervation, la méthode eſt impoſſible toutes les fois que la Lune paſſe au méridien plus de deux heures avant le coucher du Soleil, ou après ſon lever, car alors la lumière de la Lune eſt trop foible pour qu'on en puiſſe prendre la hauteur méridienne: 3.° ſi la Lune eſt couverte de nuages au moment de ſon paſſage au méridien, il n'eſt pas poſſible d'avoir la Longitude pour ce jour-là.

J'ai dit plus haut que dans tous les cas il valloit mieux employer la déclinaiſon de la Lune calculée par les Tables, que de ſe ſervir de celle qu'on auroit obſervée en mer; la raiſon en eſt claire, on peut ſe tromper d'environ 8 minutes ſur la détermination directe de la déclinaiſon de la Lune par ſa hauteur méridienne, mais le calcul par les Tables eſt toujours aſſez juſte, ſur-tout lorſque la Lune eſt vers les points ſolſticiaux: il n'eſt pas également ſûr vers les points équinoxiaux, où le mouvement de la Lune en déclinaiſon eſt fort rapide, & où indépendamment des erreurs des Tables de la Lune on commettroit environ autant de minutes d'erreurs dans le calcul de la déclinaiſon, qu'on commettroit de degrés d'erreur dans la longitude qu'on eſt obligé de ſuppoſer connue pour faire ce calcul, cependant on ne peut guère craindre que cette erreur monte à 8 minutes.

Enfin pour faire voir d'un coup d'œil le danger auquel un Navigateur s'expoſeroit, en ſuivant avec une parfaite ſécurité & une confiance aveugle, la route qui lui ſeroit indiquée par cette méthode réduite au cas le plus ſimple, qui eſt celui d'une ſeule obſervation de la hauteur de la Lune hors du méridien, j'ai calculé la Table ſuivante ſur les ſuppoſitions que je vais détailler. J'ai ſuppoſé, 1.° l'obſervateur placé ſous trois parallèles différens, ſous la Ligne, à 30 & à 60 degrés de latitude; 2.° j'ai ſuppoſé la Lune dans trois parallèles différens, ſavoir dans l'équateur & à 24 degrés de déclinaiſon de part & d'autre; 3.° j'ai ſuppoſé que l'on obſervât la hauteur de la Lune à quatre différentes diſtances du méridien, à 30, à 50, à 70 & à 90 degrés; 4.° j'ai ſuppoſé qu'il y eût 4 minutes d'erreur, tant dans la hauteur obſervée de la Lune, que dans celle du pôle, réduite au moment de l'obſervation; 5.° j'ai ſuppoſé qu'il y eût 2 minutes d'erreur dans la déclinaiſon de la Lune & autant dans ſon aſcenſion droite, calculées par les Tables; 6.° j'ai ſuppoſé qu'il n'y eût aucune erreur dans les Tables du Soleil, qui ſervent à calculer ſon aſcenſion droite; 7.° j'ai ſuppoſé que l'incertitude dans la détermination du temps vrai, n'en cauſoit une dans la longitude que de 8 minutes conſtamment: or pour peu qu'on m'accorde les propoſitions que j'ai avancées ci-deſſus, on conviendra que les ſuppoſitions que je fais ici, ne ſont rien moins qu'exagérées. Enfin, pour évaluer en degrés de longitude l'incertitude qui réſulte de la ſomme des quantités dont chaque erreur ſuppoſée peut influer dans le calcul de l'angle horaire de la Lune, j'ai réduit le mouvement horaire moyen de la Lune au Soleil en longitude, qui eſt de 30′ 28″ au mouvement horaire moyen en aſcenſion droite, lequel eſt de 28′ 0″ quand la Lune traverſe l'équateur ſous un angle de $23^d \frac{1}{2}$, & de 33′ 21″ quand la Lune eſt vers les points ſolſticiaux, & qu'elle a 24 degrés de déclinaiſon.

Rien ne ſera plus propre que la Table ſuivante, à faire voir combien il y auroit peu à compter ſur la Lune pour trouver les Longitudes en mer, ſi l'on n'avoit d'autre méthode que celle des angles horaires; on doit donc regretter ſincèrement le temps conſidérable qu'un Aſtronome habile a employé pendant pluſieurs années à calculer ces angles horaires, les aſcenſions droites de la Lune, & tout ce qui en dépendoit.

Il eſt vrai qu'alors il n'y avoit preſqu'aucun Navigateur qui fût capable de faire uſage des calculs de l'*État du Ciel;* mais s'il y en avoit eu, ils auroient bientôt aperçu l'imperfection de la méthode qu'on leur avoit propoſée.

TABLE DE L'INCERTITUDE MOYENNE DES LONGITUDES, *obſervées en mer ſelon la méthode des angles horaires.*

Hauteur du Pole de l'Obſervateur.	Diſt. de la Lune au Pôle.	Diſtance de la Lune au Méridien.	Err. cauſée par celle de 2 min. dans la déclinaiſ. de la Lune.	Err. cauſée par celle de 4 min. dans la hauteur du Pôle.	Err. cauſée par celle de 4 min. dans la hauteur de la Lune.	Erreur dans l'Aſc. dr. de la ☾, calculée ſur les Tables.	Somme des Erreurs, *ou* Incertit. de l'Angl. hor. de la Lune.	Incertitude de la Longit. y compris 8 minutes.	Incert. en lieues marines à 20 au deg
Deg.	*Deg.*	*Deg.*	*M. S.*	*M. S.*	*M. S.*	*M. S.*	*M. S.*	*D. M.*	*Deg.*
0.	66.	30.	1. 33	5. 22	3. 34	2. 0	12. 29	5. 43	114.
	90.		0. 0	4. 0	0. 0	2. 0	6. 0	3. 20	67.
	114.		1. 33	5. 22	3. 34	2. 0	12. 29	5. 43	114.
	66.	50.	0. 45	4. 37	2. 20	2. 0	9. 42	4. 32	90.
	90.		0. 0	4. 0	0. 0	2. 0	6. 0	3. 20	67.
	114.		0. 45	4. 37	2. 20	2. 0	9. 42	4. 32	90.
	66.	70.	0. 19	4. 26	1. 54	2. 0	8. 39	3. 57	79.
	90.		0. 0	4. 0	0. 0	2. 0	6. 0	3. 20	67.
	114.		0. 19	4. 26	1. 54	2. 0	8. 39	3. 57	79.
30.	66.	30.	0. 46	4. 38	0. 27	2. 0	7. 51	3. 38	63.
	90.		2. 47	6. 7	4. 0	2. 0	16. 54	8. 6	140.
	114.		4. 20	8. 50	7. 32	2. 0	22. 42	10. 21	180.
	66.	50.	0. 45	4. 39	0. 23	2. 0	7. 47	3. 36	62.
	90.		1. 30	5. 1	1. 56	2. 0	9. 27	5. 46	100.
	114.		3. 5	6. 17	4. 15	2. 0	15. 37	7. 9	124.
	66.	70.	0. 54	4. 44	1. 4	2. 0	8. 42	4. 3	70.
	90.		1. 14	4. 41	0. 50	2. 0	8. 45	4. 48	83.
	114.		3. 18	5. 22	2. 45	2. 0	13. 25	6. 8	106.
	66.	90.	1. 10	4. 57	1. 48	2. 0	9. 55	4. 35	80.
60.	66.	30.	5. 24	11. 36	7. 23	2. 0	26. 23	12. 1	120.
	90.		6. 58	14. 23	11. 57	2. 0	35. 18	19. 3	190.
	66.	50.	3. 47	8. 43	3. 29	2. 0	17. 59	8. 14	82.
	90.		4. 32	9. 52	5. 47	2. 0	23. 11	13. 0	130.
	66.	70.	3. 22	8. 0	0. 38	2. 0	14. 0	6. 25	64.
	90.		3. 42	8. 23	2. 30	2. 0	16. 35	9. 0	90.
	66.	90.	3. 28	8. 12	1. 46	2. 0	15. 26	7. 3	70.
Incertitude moyenne en lieues, à 20 au degré									97.

Je laiſſe au Lecteur à faire ſes réflexions ſur cette Table, j'ajouterai

j'ajouterai ſeulement que dans un réſultat moyen entre différens calculs de longitude conclue de pluſieurs hauteurs de la Lune, obſervées de ſuite, les erreurs ne ſeroient preſque pas compenſées, parce que dans le calcul de toutes ces hauteurs, les incertitudes ſur la vérification de l'inſtrument, ſur la hauteur du pôle, ſur les poſitions de la Lune en aſcenſion droite & en déclinaiſon, tirées des Tables, ſubſiſteroient toujours les mêmes & y influeroient de la même manière; ainſi toutes ces hauteurs donneroient des Longitudes qui ne différeroient guère entre elles, & leur milieu n'en ſeroit pas moins ſujet à preſque toute l'incertitude marquée dans la Table précédente.

Il eſt vrai qu'en prenant dans un même jour les hauteurs de la Lune à l'orient, & enſuite à l'occident, & à peu près à égale diſtance du méridien, la plupart des erreurs dans la Longitude déduite du calcul des hauteurs orientales, ſeroient égales & en ſens contraire aux erreurs dans la Longitude déduite des hauteurs occidentales; de ſorte qu'en prenant un réſultat moyen, on auroit beaucoup plus ſûrement la Longitude pour l'heure où la Lune auroit paſſé au méridien *; mais en gagnant de l'exactitude par ce moyen, cette méthode ainſi rectifiée perd preſque toute ſa poſſibilité dans la pratique, & garde pluſieurs de ſes inconvéniens.

1.° Elle ne ſauve ni l'incertitude des poſitions de la Lune en aſcenſion droite, tirée des Tables aſtronomiques, ni celle du temps vrai de l'obſervation (à moins qu'il ne ſoit auſſi déduit des hauteurs orientales & occidentales d'une même étoile, priſes à égale diſtance du méridien ou à peu près), ni enfin l'inconvénient qu'il y a de ſe ſervir de la différence d'aſcenſion droite entre la Lune & le Soleil, inconvénient qui lui ſeul rend fort incertains les calculs des Longitudes, pendant

* Je ne ſais cependant ſi un Navigateur ſeroit bien ſatisfait d'une Méthode, ſelon laquelle il ſe trouveroit, d'après une obſervation faite à l'orient par le travers du pic des Açores, & ſelon une autre, faite quelques heures après, à l'entrée de la rivière de Liſbonne: le cas eſt très-poſſible dans les ſuppoſitions de la Table précédente, quand même on obſerveroit la Lune à trois heures de diſtance de part & d'autre du méridien.

les trois ou quatre jours consécutifs où la Lune est voisine de l'équateur, & sur-tout lorsqu'elle est en même temps près de son apogée.

2.° Cette méthode ainsi corrigée en devient compliquée du double, tant pour les observations que pour le calcul.

3.° Elle est presque toujours impraticable; car outre qu'elle exige un temps serein à heures à peu près égales, avant & après le passage de la Lune au méridien, il y a d'abord dix ou douze jours de suite chaque mois, savoir les cinq ou six derniers jours de la lunaison, & les cinq ou six premiers de la suivante, où il est impossible d'observer la Lune à une distance raisonnable à l'orient, puis à l'occident du méridien; & à l'égard des autres jours, s'il arrive qu'on puisse l'observer d'un côté pendant le jour ou pendant le crépuscule, il faudra presque toujours l'observer de l'autre côté pendant la nuit close, temps auquel il n'est presque jamais possible de prendre des hauteurs exactes de la Lune.

On ne peut donc pas raisonnablement proposer cette méthode corrigée, comme praticable par le commun des Navigateurs, on pourroit tout au plus l'indiquer à ceux qui, pour varier leurs opérations, seroient en état de profiter d'une occasion qui se présenteroit, de faire toutes les observations qu'elle exige; cette occasion pourroit tomber au temps de la pleine Lune.

REMARQUES sur la Méthode expliquée par M. Bouguer.

M. Bouguer, dans son Traité de Navigation *, a expliqué une manière, proposée déjà plusieurs fois, de trouver la Longitude sur mer par le temps vrai observé du passage de la Lune au méridien du Navigateur, comparé au temps calculé de son passage à un méridien connu, tel que celui de Paris: pour avoir ce temps vrai, il suppose qu'on se serve d'une horloge à ressort, ou d'une montre passablement bien réglée, & qu'on observe des hauteurs correspondantes du Soleil & de la Lune; en sorte que celles du Soleil servent à trouver les deux midis vrais consécutifs, entre lesquels se trouve le passage de la Lune, destiné à la recherche des Longitudes.

* *Liv. IV, chap. 8.*

M. Bouguer étoit trop éclairé pour faire un grand fond sur la précision de cette méthode, & trop sincère pour ne pas faire l'aveu de son incertitude; de sorte que je ne me croirois pas obligé d'en dire davantage pour en faire rejeter l'usage, si elle n'avoit pas été proposée tant de fois, & si cette discussion n'entroit dans le plan de mon Mémoire; voici donc ce que je dois faire remarquer:

1.° Elle exige un trop grand nombre de momens de Ciel serein, comme M. Bouguer l'avoue.

2.° Elle n'est pas plus praticable que la méthode des angles horaires, corrigée par des observations orientales & occidentales, c'est-à-dire qu'on ne peut prendre des hauteurs correspondantes de la Lune dans presqu'aucun jour du mois, parce qu'il en faudroit prendre d'un côté ou pendant un trop grand jour, ou pendant la nuit close.

3.° Le mouvement réglé par un ressort spiral n'est pas assez sûrement uniforme sur mer, pour ne pas craindre l'erreur d'une demi-minute de temps dans l'intervalle du midi au temps du passage de la Lune au méridien, intervalle qui n'est guère moindre que de cinq ou six heures; or une demi-minute d'erreur en cause une de $\frac{1}{96}$ sur les 360 degrés de l'Équateur, ce qui répond à 3 degrés $\frac{3}{4}$ dans la Longitude.

4.° Cette méthode suppose que dans l'intervalle de 28 à 30 heures, nécessaire pour avoir deux midis consécutifs par des hauteurs correspondantes du Soleil, le Navire fasse une même route avec une même vîtesse; ou bien il faut faire aux observations des réductions aussi vétilleuses qu'incertaines, ce qui complique la méthode, & la met hors de la portée du commun des Marins.

Il suit de ces deux dernières remarques, qu'il seroit peut-être plus sûr de déterminer, en calculant de bonnes hauteurs absolues du Soleil & des Étoiles, le temps vrai au moment du passage de la Lune, trouvé par des hauteurs correspondantes, que d'y employer deux midis vrais consécutifs, conclus par des hauteurs correspondantes du Soleil.

5.° Pour obſerver des hauteurs correſpondantes de la Lune, unique moyen d'avoir ſur mer le temps de ſon paſſage au méridien, on ne peut guère ſe ſervir de ſon même bord, ſi ce n'eſt le jour de l'oppoſition; mais, ou il faut obſerver la hauteur de ſon centre, qu'on ne peut déterminer que par eſtime, ou bien il faut preſque toujours obſerver d'un côté un des bords, & l'autre de l'autre côté, parce que le bord éclairé qui étoit le bord ſupérieur à l'orient, devient preſque toujours le bord inférieur dans les hauteurs occidentales; il faut donc en ce cas y faire une réduction, de ſorte que quelque parti qu'on prenne, il y a un inconvénient joint à quelqu'incertitude.

6.° Enfin les temps déterminés par les obſervations des hauteurs correſpondantes, ne ſont indépendans que des erreurs qu'on auroit pu commettre dans la vérification du parallélisme des miroirs, & dans les diviſions de l'inſtrument; mais ils ne le ſont pas des erreurs commiſſibles dans l'obſervation même, & qui deviennent très-ſenſibles, tant à cauſe de la petiteſſe des diviſions du cadran d'une montre & de celle du rayon de l'inſtrument, que parce qu'il ne faut que 8 ſecondes d'erreur dans le temps du paſſage de la Lune au méridien, pour en faire une d'un degré entier dans la Longitude.

REMARQUES ſur la Méthode que j'ai donnée dans l'Introduction au ſecond tome de mes Éphémérides.

Dans l'introduction au tome des Éphémérides pour les années compriſes entre 1755 & 1765, j'ai inſéré un Diſcours ſur la manière d'obſerver les Longitudes ſur mer, à peu près ſelon la méthode propoſée par M. Halley. J'avois envoyé en 1753 à l'Académie un projet de ce Diſcours, que je compoſai à l'iſle de France dans mes heures de loiſir, où j'en laiſſai une copie; je voulois faire voir aux Officiers du Vaiſſeau ſur lequel je devois revenir en Europe, que cette méthode n'étoit pas ſi difficile dans la pratique, pourvu qu'on fût muni de calculs préliminaires, & tant ſoit peu exercé à manier le quartier de réflexion. La néceſſité où je me ſuis trouvé à mon

retour à Paris (à la fin de Juin 1754) de publier ces Éphémérides avant les derniers mois de cette même année, ne m'a pas donné le loiſir d'y faire quelques changemens pour en perfectionner la pratique. L'importance de la matière m'a fait faire enſuite de nouvelles recherches, & je compte maintenant être parvenu au point, qu'il ne me paroît guère poſſible de trouver des moyens plus ſimples & plus ſûrs de déterminer les Longitudes ſur mer par les obſervations de la Lune.

Cette méthode, qui eſt la même que celle que je propoſe encore, eſt la plus directe de toutes, puiſqu'elle conſiſte à meſurer immédiatement les portions d'arcs des mouvemens diurnes de la Lune; elle eſt la moins ſuſceptible d'erreurs, puiſqu'elle n'exige qu'une ſeule obſervation faite avec la plus grande préciſion poſſible, & que s'il s'y trouve 4 minutes d'erreur, cette erreur influe de la même manière ſur le degré de la Longitude, en quelque climat que ſoit l'obſervateur. Cette erreur eſt toujours à celle de la Longitude, comme le mouvement diurne de la Lune eſt à 360 degrés, & par conſéquent de $1^d\ 49'$ lorſque le mouvement diurne de la Lune eſt de $13^d\ 10'\ 35''$; cette méthode ſuppoſe encore deux autres obſervations, comme je le détaillerai dans le commencement de la ſeconde partie de ce Mémoire; mais 7 ou 8 minutes d'erreur dans chacune, ne peuvent jamais former enſemble une incertitude de 15 minutes ſur la Longitude. Enfin, en ſuppoſant 2 minutes d'erreur dans les calculs tirés des Tables de la Lune, elles en cauſeront une d'environ 54 minutes dans la Longitude; ainſi dans les cas les plus malheureux, l'incertitude de chaque détermination de Longitude concluë par un ſeul calcul des trois obſervations néceſſaires, ne ſera jamais que d'environ 3 degrés, c'eſt par conſéquent 60 lieues marines ſous la Ligne, 52 ſous le parallèle de 30 degrés, 30 lieues ſous celui de 60 degrés, & ainſi à proportion. Cette incertitude ſera beaucoup diminuée, ſi le Navigateur peut dans le même lieu réitérer deux ou trois fois les obſervations néceſſaires, pour avoir autant de déterminations différentes de ſa longitude, & ſur-tout s'il peut employer à chacune de ſes déterminations, autant d'inſtrumens d'une égale bonté à peu près; alors en prenant un réſultat moyen, il pourra compter d'avoir ſa longitude avec une préciſion d'un degré & demi, ou d'environ 25 ou 30 lieues marines.

En expliquant cette méthode dans le Diſcours que j'ai cité, je faiſois différentes ſuppoſitions qui en reſtreignoient l'uſage, mais qui n'ont plus lieu dans les pratiques que je vais détailler. Je ſuppoſois qu'on n'obſervât la Lune que dans le voiſinage de l'horizon, c'eſt-à-dire, au-deſſous de 20 degrés de hauteur; j'avois pour cela deux raiſons, la première que le terme de l'horizon de la mer, dont il faut ſe ſervir pour obſerver la hauteur de la Lune, laquelle entroit dans le calcul de mes réductions, m'avoit paru trop difficile à diſtinguer pendant la nuit cloſe, ſi ce n'eſt lorſque la Lune eſt au-deſſous de 20 degrés; la ſeconde raiſon étoit, que pour ſimplifier certaines règles de calcul, j'avois ſuppoſé que le coſinus de la hauteur de la Lune, ne différoit pas ſenſiblement du rayon.

Je ſuppoſois encore qu'on n'employât que le calcul trigonométrique dont je donnois les règles néceſſaires, pour les cas qui ont lieu dans la recherche des Longitudes; mais quoique cette voie ſoit ſans contredit la plus exacte & même la plus expéditive, elle a toujours l'air un peu trop ſcientifique pour le commun des Navigateurs, qui ne ſont pas encore familiariſés avec les Tables de ſinus & de logarithmes; j'emploie maintenant des opérations graphiques fort courtes & ſemblables à celles dont les Marins ont coutume de ſe ſervir pour trouver les amplitudes du Soleil, qui ſervent à calculer la variation du compas. Les figures dont j'explique la conſtruction, ne ſont que des projections ortographiques de la ſphère; j'en ai rendu les règles plus commodes & plus uniformes, en ſupprimant les petits cercles de la ſphère, qu'on devoit tracer & diviſer en degrés, ſelon les pratiques enſeignées dans les Traités de projections. Je rapporte tout au ſeul grand cercle qui renferme la figure entière, ce qui donne beaucoup plus de préciſion dans les réſultats; je ne conſeille cependant ces opérations qu'à ceux qui ne pourroient faire leur calcul par les logarithmes.

SECONDE PARTIE

Qui contient l'expoſition de la Méthode qui me paroît la meilleure pour la recherche des Longitudes, & les démonſtrations des opérations qu'elle exige.

JE ſuppoſe qu'on choiſiſſe ſept ou huit des plus belles Étoiles zodiacales, telles que γ de Pégaſe, α & β du Taureau, α & β & même γ des Gemeaux, Regulus, l'épi de la Vierge, le front & le cœur du Scorpion, pour ſervir, excluſivement à toutes les autres, à la meſure des arcs décrits dans le Ciel par la Lune. Je ſuppoſe encore qu'on dreſſe un *Calendrier marin* ou un *Almanach nautique*, deſtiné à marquer de 4 en 4 heures de temps vrai pour chaque jour du mois (excepté les trois ou quatre jours où la Lune eſt trop près du Soleil) l'arc de diſtance du bord éclairé de la Lune à celle de ces Étoiles, qui ſe trouvera ſituée plus avantageuſement pour l'obſervation. Qu'on y ajoute pour chaque jour la parallaxe horizontale de la Lune à midi, & le temps vrai du paſſage de l'Étoile au méridien, le tout aſſujéti à un méridien fixe comme celui de Paris. Je donnerai à la fin de ce Mémoire un modèle de ces ſortes de calculs, à l'aide deſquels la recherche des Longitudes en mer devient très-praticable au commun des Navigateurs, ſans exiger d'eux aucune connoiſſance d'Aſtronomie, (pas même celle des Étoiles dont ils doivent faire uſage dans cette méthode) ni plus d'une heure de travail à ceux qui y ſeront le moins exercés.

Je renvoie aux inſtructions dont j'ai parlé, le détail de tout ce qu'il faut faire pour réuſſir & pour acquérir de l'habitude dans la pratique de la méthode dont il s'agit ici. J'expoſerai ſeulement dans cette ſeconde Partie, l'ordre & le nombre des obſervations qu'il faut faire dans le cas le moins favorable, qui eſt celui d'une nuit cloſe; j'expliquerai enſuite la théorie des réductions qu'il faut faire à ces obſervations, pour parvenir à la concluſion de la Longitude.

Ordre des Obſervations.

Je ſuppoſe que l'Obſervateur ait vérifié ſon inſtrument; lequel pour être plus commode, doit être un quartier de réflexion, conſtruit ſelon les principes de M. Hadley, & garni d'une lunette, dont je donnerai à part les dimenſions. Je ſuppoſe encore que par les moyens que j'indique, l'Obſervateur ait reconnu dans le Ciel l'étoile dont il doit ſe ſervir. Je ſuppoſe enfin, qu'à l'aide de la lunette il ſe ſoit aſſuré que le terme de l'horizon qui eſt dans le vertical de l'étoile, eſt ſuffiſamment viſible.

Après tous ces préparatifs, l'Obſervateur doit commencer par prendre, le plus exactement qu'il pourra, la hauteur de cette étoile, en marquant à une montre ordinaire l'heure, la minute & la fraction de minute qu'elle indiquoit au moment de cette obſervation, & en faiſant relever avec un compas azimutal la poſition du vertical de l'étoile, ſi elle ne ſe trouve pas trop haute, pour pouvoir faire ce relèvement à un demi-rhumb près.

Auſſitôt que la hauteur de l'étoile a été priſe, l'Obſervateur doit meſurer ſa diſtance au bord éclairé de la Lune, en marquant de même à la montre l'inſtant de cette opération.

Enſuite, ſans perdre de temps, il doit prendre la hauteur du point du bord éclairé de la Lune, que l'Étoile aura raſé dans l'obſervation précédente, ſans qu'il ſoit néceſſaire de s'attacher à prendre la hauteur de ce point avec beaucoup de ſcrupule, ſur-tout ſi le bord de l'horizon n'eſt pas aiſé à diſtinguer; il ſuffit alors de l'avoir à 8 ou 10 minutes près; il doit marquer à la même montre le temps de cette troiſième obſervation, & faire cependant relever à la bouſſole la ſituation du vertical de la Lune, opération toujours facile à l'aide des reflets de la Lune, & qui n'exige qu'un demi-rhumb de préciſion.

Je ſais par un très-grand nombre d'expériences que tout cela peut être exécuté dans l'intervalle de 10 minutes de temps, pour peu qu'on y ſoit exercé, & dans celui de 5 à 6 minutes, lorſqu'on

lorſqu'on y a acquis plus d'habitude; on peut même les faire toutes dans le même inſtant (& par-là ſe paſſer de montre & de bouſſole), lorſque l'on peut partager ces opérations entre trois Obſervateurs.

De la Lunette qu'il faut appliquer aux quartiers de réflexion.

Voici les proportions qui me paroiſſent les meilleures: ſon objectif doit être un verre convexe de 10 pouces de foyer, & de 29 à 30 lignes de diamètre; l'oculaire doit être un verre plan concave, de 3 pouces $\frac{1}{2}$ ou 4 pouces de foyer, & d'un pouce de diamètre environ; le tuyau, pour être plus léger, doit être de bois couvert de chagrin ou de rouſſette, noirci en dedans; l'ouverture de l'objectif doit être de 26 à 28 lignes de diamètre, & celle de l'oculaire de 2 à 2 $\frac{1}{2}$ lignes tout au plus.

L'oculaire doit être placé dans un tuyau mobile, tenant à un frottement un peu rude, afin qu'étant alongé au point qui convient à la vue de l'Obſervateur, il ne s'enfonce pas en choquant contre ſon viſage, comme il arrive néceſſairement par l'irrégularité des mouvemens du Vaiſſeau.

L'objectif doit être centré, autant qu'il eſt poſſible, ſelon l'axe du tuyau, lequel doit être arrêté ſur l'inſtrument, de ſorte que ſon axe ſoit parallèle au plan de l'inſtrument, & qu'il paſſe par le milieu de la ligne qui ſépare la partie étamée du petit miroir de ſa partie tranſparente, ou par le milieu de la fente tranſparente du petit miroir, s'il n'a qu'une fente non étamée.

Cette lunette a cinq avantages conſidérables, & qui la rendent préférable aux lunettes à deux verres convexes qu'on a appliquées juſqu'ici à ces ſortes d'inſtrumens.

1.° Elle a un champ d'environ 10 degrés d'étendue; ce qui eſt extrêmement commode pour ne pas perdre de vue les images des objets qu'il faut réunir pour obſerver leur diſtance, & que le mouvement continuel & irrégulier du Vaiſſeau tend à faire écarter, malgré les efforts de l'Obſervateur.

2.° Dans cette étendue de 10 degrés, les images ſont tranchées net, nullement défigurées ni bordées d'iris, si ce n'est vers les extrémités du champ de la lunette, où l'on commence à apercevoir quelqu'irrégularité dans les figures, & quelques couleurs lorsque les objets sont vivement éclairés, comme la Lune près de son plein; mais ce léger inconvénient ne peut nuire à la précision des observations, qui ne se font que par une réunion d'images dans le champ du petit miroir qui répond au milieu de celui de la lunette; on voit au reste que dans cette lunette les images ne doivent être ni sensiblement défigurées, ni entourées de franges colorées, parce que les rayons de lumière réfractés par l'objectif, se trouvent interceptés par l'oculaire, avant qu'ils se soient sensiblement séparés en faisceaux colorés, & que la figure sphérique du verre ait contraint les rayons, partis du même point de l'objet, à former différens foyers qui troublent l'image de ce point.

3.° Comme cette lunette transmet à l'œil de l'Observateur une quantité prodigieuse de lumière, on peut toujours prendre hauteur par-devant, avec l'instrument auquel elle est appliquée, parce que le terme de l'horizon de la mer qui paroît presque toujours embrumé au-dessous du Soleil, & clair-fin à l'opposite, sera toujours aisé à distinguer à l'aide de cette lunette. Je m'en suis assuré, en appliquant à un quartier de réflexion une lorgnette d'opéra fort commune, avec laquelle j'ai toujours observé par-devant, lorsqu'avec les instrumens à simple visière on étoit obligé d'observer par-derrière, opération incommode sur-tout avec le quartier de M. Hadley, & d'ailleurs peu sûre, à cause de la difficulté des vérifications & des réductions qu'il faut faire.

4.° Pour peu que l'horizon soit éclairé par les Étoiles ou par la Lune, & qu'il soit dégagé de nuages, on doit toujours le distinguer en mer pendant la nuit close, sur-tout si l'on se tient dans les endroits du Vaisseau les moins élevés qu'il est possible. On peut donc prendre alors les hauteurs des Planètes & des Étoiles avec beaucoup plus de facilité avec cette lunette, qu'avec les autres, & par conséquent cette lunette étend prodigieusement le nombre des cas où les observations en mer sont possibles.

5.° On voit distinctement dans le champ de cette lunette le petit miroir, son cadre & sa monture, quoiqu'ils soient tout auprès de l'objectif, ce qui est fort commode pour donner à l'instrument les mouvemens nécessaires pour faire arriver les images des objets vus par réflexion, sur tel point qu'on veut du champ du petit miroir.

Si cette lunette n'amplifie qu'environ deux fois & demi ou trois fois le diamètre des objets, c'est un inconvénient commun à toutes les lunettes appliquées à des instrumens destinés aux observations de mer, parce que la vîtesse apparente des mouvemens du Vaisseau est augmentée dans le même rapport que le diamètre des objets, & par conséquent elle devient d'autant plus incommode dans l'usage des instrumens.

Du Calcul de l'heure vraie de l'observation de la Lune.

Quelques nombreuses recherches qu'on ait faites à l'occasion du Prix proposé par l'Académie en 1745 & 1747, sur la meilleure manière de trouver l'heure en mer, il est certain qu'on n'a imaginé rien de praticable dans des mers comprises entre les deux polaires, qui soit préférable à la méthode ordinaire, qui consiste à observer la hauteur d'un astre à une distance raisonnable du méridien, & à calculer cette distance par le moyen de la déclinaison de cet astre & de la hauteur du pôle qu'on suppose connues.

La précision avec laquelle on peut avoir le temps vrai par cette méthode, dépend non-seulement de la déclinaison de l'astre & de sa distance au méridien, mais principalement de l'exactitude avec laquelle sa hauteur & celle du pôle sont déterminées. Si on suppose, comme pour un cas extrême, 8 minutes d'erreur dans une seule hauteur d'Étoile zodiacale, & 4 minutes dans la hauteur du pôle, on trouvera facilement, à l'aide de la Table insérée dans la première partie de ce Mémoire, l'erreur qui en résultera dans le calcul du temps vrai; il suffira de doubler les nombres marqués dans la sixième colonne, de les ajouter ensuite à ceux de la cinquième, & de convertir la somme en temps. Ainsi en prenant un milieu entre les résultats marqués pour les différentes hauteurs du pôle & pour les différentes distances d'un astre zodiacal au méridien, on trouve que la plus grande incertitude seroit de 43 secondes sous la Ligne, de 54 secondes sous le parallèle de 30 degrés, & de 1′ 38″ sous celui de 60; en les réduisant en lieues marines, on a 3 lieues & demie sous la Ligne, 4 à la hauteur du pôle de 30 degrés, & un peu plus de 4 à celle de 60 degrés. Or comme il y a un très-grand nombre de circonstances où l'on peut être assuré d'avoir la hauteur d'un astre avec plus de précision qu'à 8 minutes près, on peut regarder la méthode ordinaire de trouver l'heure en mer, comme suffisamment sûre du côté des observations qu'on emploie pour en faire le calcul.

A l'égard de ce calcul, celui qu'on fait par les règles de la Trigonométrie sphérique, est susceptible de la plus grande exactitude. Mais voici une méthode plus facile.

Je suppose qu'un Marin qui se propose de déterminer l'heure en mer par des hauteurs du Soleil & des Étoiles hors du méridien, ait préparé à loisir un ou plusieurs cartons fins & lissés, sur lesquels il ait décrit & divisé en tous ses degrés un cercle de 17 à 18 pouces de diamètre; pour en faire usage lorsqu'il voudra chercher l'angle horaire de l'astre observé, voici ce que prescrivent les règles ordinaires de la projection orthographique. Il tirera sur ce cercle un diamètre à volonté

Fig. 1. *HR (fig. 1)* pour désigner l'horizon, il marquera le zénith *Z*, le pôle *P* selon sa hauteur, le diamètre *EQ* à 90 degrés de *P*, pour désigner l'équateur, la corde *XV* pour l'almicantarat de l'astre, & la corde *T*♈, pour représenter son parallèle; sur *T*♈ comme diamètre, il faut décrire le demi-cercle *TF*♈, & du point *A*, où le parallèle & l'almicantarat s'entrecoupent, il faut élever à *T*♈ la perpendiculaire *AF*, qui détermine l'arc *TF* de la distance de l'astre au méridien; dont il faut par conséquent mesurer le nombre de degrés par quelque machine, ou en divisant réellement le demi-cercle *TF*♈ en ses degrés.

Cette méthode est simple dans la théorie, mais elle est souvent susceptible de peu d'exactitude, parce que le demi-

cercle *TF*♈ est d'un rayon d'autant plus petit que la déclinaison de l'astre est plus grande, & par conséquent la mesure de l'arc *TF* en est d'autant plus sujette à erreur.

Je supprime donc ce petit cercle, j'abaisse du point *A* sur l'équateur *EQ* la perpendiculaire *AG*. Je tire le rayon *CT*, qui coupe en *I* cette perpendiculaire; avec le compas je porte *CI* en *CK*, & par le point *K* je fais passer la corde *BS* perpendiculaire à *EQ*. L'arc *BES* qu'elle soutend, est le double de la distance de l'astre au méridien, qu'il est facile de connoître par les divisions du cercle *HER* préparé pour ces opérations.

Pour le démontrer, j'abaisse de *C* sur *T*♈ la perpendiculaire *CM*, & alors il est clair que l'arc *ES* du grand cercle est semblable à l'arc *TF* du petit cercle, puisque leurs cosinus *CK*, *MA* sont dans le rapport des rayons *CT*, *MT*, comme on le voit par les triangles rectangles semblables *TCM*, *TIA*, qui donnent la proportion *CI* ou *CK* : *MA* :: *CT* : *MT*.

Mais on peut réduire cette opération à celle-ci qui est plus simple encore: Prenez la somme & la différence de la hauteur de l'équateur & de la déclinaison de l'astre; l'une sera sa hauteur méridienne, l'autre son plus grand enfoncement sous l'horizon; marquez-en les points en *T* & ♈ *(fig. 2)*, & joignez *T*♈ Fig. 2.
qui sera le parallèle de l'astre; par le point *T* de la hauteur méridienne, tirez le diamètre *TK*; tirez l'almicantarat *VX*; & du point *A* où il coupe le parallèle, élevez à ce parallèle la perpendiculaire *AI*; portez avec le compas la distance *CI* en *CF*; prenez l'ouverture *FI*, & portez-là deux fois de suite sur les divisions du cercle, pour savoir le nombre de degrés qui auront été embrassés de la sorte; ce nombre sera celui d'autant de minutes de temps dont il s'en faudra que la distance de l'astre au méridien ne soit de six heures, ou, ce qui revient au même, ce nombre de degrés sera le quadruple du complément de l'arc horaire; car, puisqu'on vient de voir que *CI* étoit le cosinus de l'arc horaire, son double *FI* est la corde de deux fois le complément de l'arc horaire; donc

FI porté deux fois doit embrasser le quadruple de ce complément.

Cette figure, construite avec soin, doit donc donner le temps avec une précision fort approchante de celle du calcul trigonométrique, où l'on auroit négligé les secondes de degré.

De la manière de réduire la distance observée de la Lune à une Étoile, à la distance vraie qui doit servir au calcul de la Longitude.

Pour réduire la distance apparente de la Lune à une étoile, à la distance qu'on eût observée s'il n'y avoit point eu de parallaxe ni de réfraction, il faut imaginer un triangle sphérique
Fig. 3. ZEL (*fig. 3*), formé par le zénith Z, la Lune L & l'étoile E; soit Ee la réfraction de l'étoile, Ll celle de la Lune, & $l\lambda$ la parallaxe de hauteur, il est visible que la distance observée EL doit être réduite à la distance $e\lambda$.

Pour cela, du point B où les arcs EL, $e\lambda$ s'entrecoupent, je décris les arcs er, λp, qu'on peut prendre pour de petites droites, tirées des points e, λ perpendiculairement sur l'arc observé EL; & dans les triangles sensiblement rectilignes Eer, λLp, & rectangles en r, p, on a Er & Lp pour les deux corrections qu'il faut faire à l'arc EL, afin de le réduire à $e\lambda$; or il est évident que dans le triangle eEr, la correction Er est à la réfraction Ee de l'étoile, comme le cosinus de l'angle eEr ou ZEL est au rayon; de même dans le triangle rectangle $\lambda\, p\, L$, la correction pL est à $L\lambda = l\lambda - Ll$, c'est-à-dire, à la parallaxe de la Lune moins la réfraction, comme le cosinus de l'angle $PL\lambda$ ou ELZ est au rayon.

Il suit de-là que pour faire les corrections dont il s'agit, il faut réduire les hauteurs observées de l'Étoile & de la Lune, à celles qu'on eût trouvées à l'instant où l'on a pris leur distance; puis dans le triangle sphérique LZE, dont les trois côtés sont connus par l'opération précédente, il faut calculer les angles en E & en L aux cosinus desquels les deux corrections dont il s'agit sont proportionnelles & additives ou soustractives, selon l'espèce des angles en E ou en L, savoir; la correction de la réfraction de l'Étoile est additive si l'angle en E est aigu, & soustractive s'il est obtus; au contraire, celle de la parallaxe moins la réfraction de la Lune est additive si l'angle L est obtus, soustractive s'il est aigu.

Pour réduire la hauteur de l'Étoile & la hauteur de la Lune à celles qu'on eût observées dans le moment où l'on a mesuré leurs distances.

Cette réduction n'a pas lieu, lorsque trois Observateurs ont fait de concert, & en moins d'une minute de temps, les observations nécessaires pour la Longitude; elle se fait par une simple proportion, si l'on a observé plusieurs hauteurs de l'Étoile & de la Lune; mais si l'on n'a qu'une seule hauteur avec le relèvement du vertical où l'astre étoit alors, on la réduira à celle qu'on eût observée quelques minutes avant ou après, à l'aide d'une Table fort courte & fort commode, fondée sur les formules différentielles des triangles sphériques & qu'on peut représenter par une échelle ou treillis.

Dans le triangle ZPE (*fig. 7*) où P est le pôle, Z le Fig. 7.
zénith, E un astre quelconque, si on suppose les côtés ZP & EP constans, l'incrément de ZE est à celui du temps, marqué par l'angle P, comme fin. $ZP \times$ fin. Z, est au carré du rayon; étant donc données la hauteur du pôle (à 2 ou 3 degrés près) le quart de rhumb dans lequel on a trouvé le vertical de l'astre & l'intervalle de temps entre l'instant où l'on a pris la hauteur de l'astre, & l'instant pour lequel on veut avoir cette hauteur, on trouve dans cette Table de combien l'astre s'est élevé ou abaissé dans cet intervalle.

On peut toujours faire le relèvement du vertical de la Lune, mais si l'on n'a pu faire celui de l'Étoile, on trouvera l'amplitude de son vertical, en tirant quelques lignes de plus dans la figure qu'on aura déjà construite, pour avoir sa distance horaire au méridien.

Reprenant donc ici les principaux points de la *fig. 4* du point Fig. 4.

A, où ſe fait l'interſection du parallèle & de l'almicantarat de l'Étoile, j'abaiſſe ſur HR la perpendiculaire AL, je tire CX qui coupe cette perpendiculaire en quelque point comme D; je porte CD en CO, par le point O j'élève ſur HR la perpendiculaire ON, qui rencontrera le méridien quelque part en N, & l'arc ZN ſera l'amplitude du vertical cherché.

On peut remarquer que quoique le mouvement diurne de la Lune ſoit plus lent d'environ $\frac{1}{30}$ que celui du Soleil, & que ſa parallaxe altère ſon mouvement dans le ſens vertical, cependant la différence eſt trop petite dans l'eſpace de quelques minutes de temps; & les réductions dont il s'agit ici, n'exigent pas tant de préciſion pour qu'il ſoit néceſſaire de compliquer les calculs en preſcrivant l'uſage des différentes Tables, conſtruites les unes pour les Étoiles, d'autres pour le Soleil, & d'autres pour la Lune.

Pour réduire la diſtance obſervée de la Lune à l'Étoile, à celle qui n'auroit été altérée ni par la réfraction, ni par la parallaxe.

Cette réduction n'eſt d'aucune difficulté dans le calcul trigonométrique, après la théorie que j'en ai donnée ſur la *fig. 2*: mais voici comme on la peut faire graphiquement.

Fig. 5. Sur le cercle deſtiné aux opérations graphiques, tirez à volonté un diamètre DA *(fig. 5)*, marquez un point Z à 90 degrés de ce diamètre, prenez les arcs DM, AG égaux chacun à la hauteur de la Lune réduite par les opérations précédentes; prenez de même les arcs DK, AI égaux chacun à la hauteur de l'Étoile, réduite auſſi au moment de l'obſervation de la diſtance; marquez le point O à la droite du point Z, de ſorte que l'arc AO ſoit égal à la diſtance apparente de la Lune à l'Étoile, telle qu'elle a été obſervée; tirez IK, MG & le diamètre OB, marquez de même vers Z le point P à 90 degrés des points O, B; prenez les arcs OS, BR égaux chacun à la hauteur de l'Étoile, & les arcs OF, BE égaux chacun à la hauteur de la Lune (ce qui ſe fait en portant l'arc AI en OS & BR, & l'arc AG en OF & BE); tirez FE, RS & le rayon CP, alors LH exprimera la correction de la parallaxe de la Lune & celle de ſa réfraction; la correction de la parallaxe eſt additive quand le point H tombe entre les points L & E, ou à gauche du point L par rapport à CP; elle eſt ſouſtractive quand le point H tombe entre L & F; celle de la réfraction eſt au contraire ſouſtractive dans le premier cas, additive dans le ſecond; la droite QN eſt la correction de la réfraction de l'Étoile, laquelle eſt additive quand le point N tombe entre Q & S, & ſouſtractive quand il tombe entre Q & R.

Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir que LH exprime le coſinus de l'angle à la Lune entre le zénith & l'Étoile, & que QN exprime le coſinus de l'angle à l'Étoile; ſi donc dans le triangle ſphérique $\varepsilon\xi\lambda$ *(fig. 6)*, on ſuppoſe que le zénith ſoit en ε, le pôle en λ, & que $\varepsilon\lambda$ ſoit un arc du méridien, qu'enfin ξ ſoit un aſtre quelconque, alors l'angle à la Lune qu'on a cherché dans l'opération graphique précédente, ſera comme l'angle horaire du point ξ, l'arc $\varepsilon\lambda$ comme une hauteur d'Équateur, & $\xi\lambda$ comme une diſtance au pôle; or ſelon la conſtruction du problème pour trouver l'angle horaire de l'Étoile rapportée ci-deſſus & appliquée à la *fig. 5*, DA repréſente l'horizon, Z le zénith, OB l'équateur (puiſque l'on a pris $OA = \varepsilon\lambda$), KI repréſente l'almicantarat du point ξ, & EF ſon parallèle; ſi donc de l'interſection H on élève la perpendiculaire HT, terminée à la circonférence du demi-cercle décrit ſur EF, l'arc TF meſurera l'angle horaire du point Z, & LH en ſera le coſinus. Fig. 6. Fig. 5 & 6.

On démontre de même que QN ſeroit le coſinus d'un angle horaire du point ξ, ſi on regardoit le point λ comme le zénith, le point ε comme le pôle, & l'arc $\varepsilon\lambda$ comme une portion du Méridien.

A l'égard de la meſure de ces lignes, il eſt ſi aiſé d'imaginer des échelles propres à cet uſage, que je ne m'y arrêterai pas. On en peut voir le détail dans l'Expoſition du Calcul aſtronomique, *page 173*.

MODÈLE DE CALCULS POUR UN ALMANACH NAUTIQUE, selon la méthode expliquée dans ce Mémoire.

Pour les derniers jours de Mai 1754.

Jours du mois.	NOMS des Étoiles dont on doit se servir.	Temps vrai du passage de l'Étoile au Méridien.	Parall. horis. ☾ à midi.	HEURES pour lesquelles les distances ont été calculées.							Position de l'étoile à l'égard de la Lune.
				Midi.	4.	8.	12.	16.	20.	24.	
		H. M. S.	*M.*	*D. M.*	*D. M.*	*D. M.*	*D. M.*	*D. M.*	*D. M.*	*D. M.*	
25	*Régulus.*	5. 46. 3	57,7	42. 4,6	39. 48,8	37. 33,1	35. 17,0	33. 1,0	30. 45,0	28. 28,9	*Ori.*
26		5. 42. 0	58,0	28. 28,9	26. 12,9	23. 56,7	21. 40,6	19. 24,4	17. 8,2	14. 51,9	*Ori.*
27	*Le Soleil.*	0. 0. 0	58,3	53. 15,0	55. 24,3	57. 33,6	59. 43,0	61. 52,3	64. 1,7	[illegible]. 11,1	*Occ.*
28		0. 0. 0	58,6	66. 11,1	68. 21,0	70. 30,8	72. 40,7	74. 50,6	77. 0,7	79. 11,1	*Occ.*
27	*L'Épi de la Vierge.*	8. 54. 26	58,3	68. 0,5	65. 40,0	63. 20,2	61. 1,0	58. 40,2	56. 20,0	53. 59,7	*Ori.*
28		8. 50. 24	58,6	53. 59,7	51. 39,5	49. 19,2	46. 58,5	44. 38,8	42. 19,4	40. 0,5	*Ori.*
29		8. 46. 21	58,9	40. 0,5	37. 41,7	35. 21,7	33. 0,3	30. 38,5	28. 15,5	25. 51,0	*Ori.*
30		8. 42. 18	59,0	25. 51,0	23. 26,0	21. 1,8	18. 39,6	16. 17,6	13. 54,5	11. 30,1	*Ori.*
31	*Antarès.*	12. 39. 36	59,0	57. 31,3	55. 10,6	52. 50,2	50. 30,0	48. 9,7	45. 49,7	43. 29,8	*Ori.*

L'explication des calculs de cette Table & leur usage se trouveront dans la Connoissance des Temps de 1761, dans celle de 1762, dans l'Exposition du Calcul Astronomique, par M. de la Lande, & dans la seconde édition du Traité de Navigation de M. Bouguer, *in-8.°* qui va paroître dans peu de temps.